I Familles de vecteurs et rang

Exercice 1 (CCP PSI 2012) *[Solution]*
Soient $f_k : x \mapsto \cos(kx)$ et $g_k : x \mapsto \sin(kx)$. Montrer que $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est libre.

Exercice 2 *[Solution]*

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_k : x \in \mathbb{R} \longmapsto (1 + x + \cdots + x^k)\sin(kx)$. Montrer que $f_1, f_2, \dots, f_n$ sont libres.
   indication : introduire une suite $(x_p)_{p\geqslant 0}$ tendant vers $+\infty$ telle que $f_n(x_p)$ est « grand ».
2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}^*$, on pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, $f_k(x) = (f(x))^k$. Montrer que $f_1, \dots, f_n$ sont libres si et seulement si $\mathrm{Card}\,(f([0,1])) \geqslant n$.
   indication : à partir d'une relation de liaison sur les f_k, faire apparaitre un polynôme et compter ses racines.

Exercice 3 (CCP PSI 2013) *[Solution]*
Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer les coordonnées de X^k dans cette base.

Exercice 4 (Mines-Ponts PSI 2019) *[Solution]*
Donner le rang de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis donner une base de son noyau et de son image.

Exercice 5 (ENSEA PSI 2019) *[Solution]*
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \sin(i + j)$. Déterminer le rang de A.
indication : Écrire C_j comme combinaison linéaire de 2 vecteurs avec la formule d'addition du sin.

II Projecteurs et sommes directes

Exercice 6 (CCP PSI 2019) *[Solution]*
Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur de E. Montrer que $f \circ p = p \circ f$ si et seulement si $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par f.

Exercice 7 *[Solution]*
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(A) \oplus \ker(A - 2I_3) \oplus \ker(A + 2I_3)$.

Exercice 8 (CCP PSI 2016) *[Solution]*
Soient $f_1, \dots, f_k$ des endomorphismes non nuls de E tels que $f_1 + \cdots + f_k = id_E$ et $f_i \circ f_j = 0$ si $i \neq j$.

1. Montrer que f_i est un projecteur ; on s'intéressera à $f_i \circ (f_1 + \cdots + f_k)$.
2. Montrer que $E = \mathrm{Im}(f_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(f_k)$.
3. Soit $f = a_1 f_1 + \cdots + a_k f_k$. Calculer f^p.
4. Montrer que $(f_1, \dots, f_k)$ est libre et $(id_E, f, \dots, f^k)$ est liée.
5. Montrer que $(id, f, \dots, f^{k-1})$ est libre si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.

Exercice 9 (ENTPE-EIVP PC 2011 avec $p = 2$) *[Solution]*
Soit E un espace vectoriel de dimension n, $(f_1, \dots, f_p) \in \mathcal{L}(E)^p$ tels que $f_1 + \cdots + f_p = id_E$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \mathrm{rg}(f_i) \leqslant n$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Im}(f_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(f_p)$.
   indication : commencer par montrer que $E = \mathrm{Im}(f_1) + \cdots + \mathrm{Im}(f_p)$ puis utiliser la dimension.
2. Montrer que $f_1, \dots, f_p$ sont les projecteurs associés à cette décomposition (ie que $i \neq j \Rightarrow f_i \circ f_j = 0$).

Exercice 10 *[Solution]*
Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On note f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de f, des bases de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
2. Ecrire S, la matrice dans $\mathcal{B}$ de la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\{e_2+e_3, 3e_1-2e_2\}$ parallélement à $\mathrm{Vect}\{e_1+e_2+e_3\}$.
3. Calculer SM et $(SM)^2$. Préciser la nature de l'endomorphisme dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est SM.
4. Montrer que f est la composée commutative d'une symétrie et d'une projection.

Exercice 11 **(CCP PC 2007)** *[Solution]*
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $u^n = id_E$. Soit V un sous-espace vectoriel de E stable par u et p un projecteur sur V. On pose $q = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}$.

1. Montrer que $q \circ u = u \circ q$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(q) \subset V$ puis que $p \circ q = q$.
3. Montrer que q est un projecteur et en déduire que $\mathrm{Im}(q) = V$.
4. Montrer que V possède un supplémentaire stable par u.

Exercice 12 **(Centrale PSI 2011)** *[Solution]*
Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

1. On suppose que $g \circ f = id_{\mathbb{R}^p}$. Trouver la nature et le rang de $f \circ g$.
2. On suppose que $f \circ g$ est un projecteur de rang au moins p. Donner les rangs de f et g puis déterminer $g \circ f$.
   indication : $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p)$ *pour un projecteur.*

Exercice 13 **(ENSEA-ENSIIE PSI 2014)** *[Solution]*
Ecrire la matrice de f, endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie tel que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{Tr}(f) = 1$, dans une base bien choisie et en déduire que f est un projecteur.

III Endomorphismes, noyaux et images

Exercice 14 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $\ker(A^2)$ et $\ker(A - 2I_3)$ sont en somme directe
2. Trouver un vecteur de $\ker(A^2)$ qui n'appartient pas à $\ker(A)$ puis montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que si $B^2 = A$ alors $\ker(A^2)$ est stable par B ; que peut-on en déduire ?
   indication : utiliser que si f est nilpotent et $\dim(E) = n$ *alors* $f^n = 0$

Exercice 15 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ non nul tel que $f^3 + f = 0$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + id)$ et $\ker(f^2 + id) \neq \{0\}$
2. Soit $x \in \ker(f^2 + id)$ non nul, montrer que $(x, f(x))$ est libre
3. Déterminer les dimensions de $\ker(f^2 + id)$ et $\ker(f)$.
4. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
5. Trouver les $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f = u^2$?

Exercice 16 **(ENSSAT PC 2011 complété)** *[Solution]*
Soit f un endomorphisme non nul et non bijectif de E, espace vectoriel de dimension finie. Montrer que l'équivalence de :

i) $\ker(f) = \ker(f^2)$
ii) $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$
iii) Il existe une base $\mathcal{B}$ et une matrice U inversible telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$

Exercice 17 **(IMT PSI 2019)** *[Solution]*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E tels que $E = \ker(f) + \ker(g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. Montrer que les 2 sommes sont directes.

Exercice 18 **(Mines-Télécom PSI 2017)** *[Solution]*
Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f \circ g)$ si et seulement si $E = \mathrm{Im}(g) + \ker(f)$.
2. Montrer que $\ker(f) = \ker(g \circ f)$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g) = \{0\}$.

Exercice 19 **(CCP MP 2012)** *[Solution]*
Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$, où $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le noyau de f. f est-il surjectif ?
2. Donner une base du noyau et de l'image de f.

Exercice 20 **(Mines-Ponts PSI 2016)** *[Solution]*
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Montrer que $a_0 \neq 0$ si et seulement si $\forall Q \in \mathbb{K}[X], \exists! P \in \mathbb{K}[X], \sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)} = Q$.
indication : il s'agit de montrer la bijectivité d'une application ; commencer par vérifier que nécessairement $\deg(P) = \deg(Q)$ *pour se ramener en dimension finie.*

Exercice 21 **(ENSEA PSI 2016)** *[Solution]*

1. Préciser l'endomorphisme canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $M = AB$.
3. Montrer que $BA = I_2$ (pour tout couple (A, B) vérifiant la question précédente).
   indication : partir de M^2 *puis déterminer* $\ker(A)$ *et* $\mathrm{Im}(B)$*.*

Exercice 22 **(Mines-Télécom PSI 2019)** *[Solution]*
Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,E)$. On suppose $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$

1. Montrer que $E = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(v)$
2. Montrer que si E et F sont de dimension finies alors $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(v)$

Exercice 23 **(ENTPE-EIVP PC 2016)** *[Solution]*

1. Montrer que, si f et g sont deux endomorphismes vérifiant $f \circ g \circ f = f$, alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs.
2. Montrer que de plus $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f \circ g)$ et que $\ker(f) = \ker(g \circ f)$.
3. Montrer que si $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$, alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g)$.
4. Montrer réciproquement que si $f \circ g \circ f = f$ et $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g)$ alors $g \circ f \circ g = g$.
   indication : utiliser la décomposition de E donnée par la première question et vérifier que $\ker(f \circ g) = \ker(g)$*.*

Exercice 24 **(Mines-Ponts PSI 2014)** *[Solution]*
Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que $v \circ u$ est un isomorphisme. Montrer que $F = \ker(v) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

Exercice 25 **(Mines-Ponts PSI 2014)** *[Solution]*
Soit $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{rg}(M) = \min\{k \in \mathbb{N}, \exists (A,B) \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{k,q}(\mathbb{R}), M = AB\}$.
indication : commencer avec $M = J_r$.

Exercice 26 **(Centrale PSI 2014)** *[Solution]*

1. Montrer qu'une matrice A non inversible est équivalente à une matrice nilpotente.
   indication : montrer qu'il existe P et Q inversibles telle que $P^{-1}AQ$ soit triangulaire supérieure stricte.
2. Soit f une application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, non constante égale à 1 et telle que $f(AB) = f(A)f(B)$. Montrer que si A n'est pas inversible alors $f(A) = 0$.

Exercice 27 **(Mines-Ponts PSI 2017)** *[Solution]*
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $AB = A + B$. Montrer que $\ker(A) = \ker(B)$.
indication : vérifier $\ker(B) \subset \ker(A)$ *et transposer l'égalité.*

Exercice 28 **(ENSIIE-ENSEA PSI 2014)** *[Solution]*
Soient f un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie, A et B deux sous-espaces supplémentaires de E, non réduits à $\{0\}$. Montrer que f est un automorphisme si et seulement si $f(A)$ et $f(B)$ sont supplémentaires.
Est-encore vrai en dimension infinie ?
indication : la dérivation sur $\mathbb{R}[X]$ *avec les polynômes pairs et impairs.*

Exercice 29 **(Mines-Ponts PSI 2017)** *[Solution]*
Trouver les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec toutes les matrices de rang 1.
indication : soit utiliser les $E_{i,j}$ qui sont de rang 1, soit prouver que toute droite est stable dans ce cas.

IV Endomorphismes nilpotents

Exercice 30 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer M^n pour $n \geqslant 1$.
   indiction : écrire $M = I_3 + N$ et vérifier N nilpotente
2. Déterminer une base de $F = \text{Vect}\{M^n, n \geqslant 1\}$.
3. Montrer que le commutant de M est exactement F.

Exercice 31 *[Solution]*

1. Soit f un endomorphisme de E nilpotent, on suppose $f^k = 0$ et $f^{k-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0))$ est libre.
2. En déduire si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors $M^n = 0$.

Exercice 32 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$ pour un entier $p \geqslant 1$.

1. Existe-t-il $k \leqslant p$ tel que $f^k = 0$?
2. Montrer qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ soit libre. En déduire $p \leqslant n$.
3. On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = g^2$, montrer que $2p - 1 \leqslant n$

Exercice 33 **(Mines-Télécom PSI 2021)** *[Solution]*
Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $\mathcal{B} = (a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ soit une base de E.
2. Écrire la matrice de f dans $\mathcal{B}$. f est-il bijectif ?
3. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = 0$ et $M^2 \neq 0$.
   a) M est-elle semblable à $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?
   b) Montrer que les endomorphismes qui commutent avec f sont des polynômes en f.

Exercice 34 **(CCP PSI 2011)** *[Solution]*
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Montrer que $id_E - f$ est inversible et donner son inverse.
Résoudre $U(P) = X^n$, où $U(P) = P - P'$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.
indication : penser à la factorisation de $X^p - 1$ pour la première question.

Exercice 35 **(Mines-Ponts PC 2012)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle. Montrer que $A^2 = 0$ si et seulement si il existe $r \in \left[0, \dfrac{n}{2}\right]$ tel que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 36 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $f \circ f = 0 \Leftrightarrow \exists (g, h) \in \mathcal{L}(E)^2, f = g \circ h$ et $h \circ g = 0$.
indication : commencer par l'exercice précédent

Exercice 37 **(Mines-Ponts PSI 2021)** *[Solution]*
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, espace de dimension finie.

1. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker(u) = G$ et $\text{Im}(u) = F$ si et seulement si $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.
2. Trouver un tel endomorphisme u lorsque $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}\{(1, -1, 0)\}$

Exercice 38 **(Centrale PC 2014)** *[Solution]*
Soient $f_1, \ldots, f_n$ des endomorphismes nilpotents de E, espace vectoriel de dimension n, qui commutent 2 à 2. Montrer que si $k \in [\![1, n]\!]$ alors $\text{rg}(f_1 \circ \cdots \circ f_k) \leqslant n - k$.
Que peut-on en déduire ?

Exercice 39 **(Centrale PSI 2016)** *[Solution]*
Soit E un espace de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. On note $I_k = \text{Im}(f^k)$ et $N_k = \ker(f^k)$.

1. Montrer que tous les N_k et les I_k sont stables par f puis montrer les inclusions strictes : $N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_n$.
2. Déterminer la dimension de N_k et de I_k.
3. Déterminer l'ensemble des sous-espaces stables par f.

4. Pour quels couples $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ a-t-on $N_i = N_j$?

Exercice 40 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*
Soient $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $H = \{M \in E, \mathrm{Tr}(M) = 0\}$ et N l'ensemble des matrices nilpotentes.

1. H et N sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

2. Trouver $\mathrm{Vect}(N)$.

V Polynômes d'endomorphisme

Exercice 41 **(CCP PSI 2011)** *[Solution]*
Soit f un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie tel que $f + f^4 = 0$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
et en dimension quelconque ?

Exercice 42 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = id$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f - id) \subset \ker(f^2 + f + id)$

2. Montrer que $E = \ker(f - id) \oplus \mathrm{Im}(f - id)$

Exercice 43 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ non nul tel que $f^3 + f = 0$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + id)$ et $\ker(f^2 + id) \neq \{0\}$

2. Soit $x \in \ker(f^2 + id)$ non nul, montrer que $(x, f(x))$ est libre

3. Déterminer les dimensions de $\ker(f^2 + id)$ et $\ker(f)$.

4. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. Trouver les $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f = u^2$?

Exercice 44 **(Mines-Ponts PSI 2014)** *[Solution]*
Soit u un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $E = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$ si et seulement si u est combinaison linéaire des u^k, pour $k \geqslant 2$.

Exercice 45 *[Solution]*
Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et $A = (a_{i,j})$ la matrice telle que $a_{i,j} = \left\{ \begin{array}{ll} a & \text{si } i \neq j \\ b & \text{sinon} \end{array} \right.$. Calculer $(A + (a-b)I_n)^2$ et en déduire une CNS pour que A soit inversible ; expliciter A^{-1} dans ce cas.

Exercice 46 *[Solution]*
Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer un polynôme annulateur de M de degré 2 puis M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 47 **(CCP PSI 2017)** *[Solution]*

1. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme annulateur non nul de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de degré $\leqslant 2$.

2. Trouver un polynôme annulateur de A et en déduire A^{-1}.

3. Quels sont tous les polynômes annulateurs de A ?

Exercice 48 **(Télécom Sudparis PC 2011)** *[Solution]*
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $2u^3 - 5u^2 + 3u = 0$. Calculer u^n en fonction de id_E, u et u^2.

Exercice 49 **(CCINP PSI 2018)** *[Solution]*
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\exists P \in \mathbb{K}[X], \deg(P) \geqslant 1, P(0) = 1, AB = P(A)$.
Montrer que A est inversible et en déduire que $AB = BA$.

Exercice 50 **(CCINP PSI 2018)** *[Solution]*
Soit f un endomorphisme de E pour lequel il existe un polynôme annulateur P tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, d'abord en dimension finie puis en dimension quelconque.

Exercice 51 **(CCINP PSI 2019)** *[Solution]*

1. Montrer que, si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel possédant un polynôme annulateur dont 0 est racine simple, $\ker(u) = \ker(u^2)$.
2. Montrer que si de plus, u est nilpotent alors $u = 0$.

Exercice 52 **(Mines-Télécom PSI 2018)** *[Solution]*
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si $\exists n \in \mathbb{N}^*, f^n = id$ alors $f \in \mathcal{GL}(E)$.
2. Montrer que si $\exists n \in \mathbb{N}^*, f^n = 0$ alors $id - f \in \mathcal{GL}(E)$.
   indication : Utiliser $X^n - 1 = (X-1)(1 + X + \cdots + X^{n-1})$
3. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g(x) = x$ pour tout $x \in \operatorname{Im}(f)$.
   indication : C'est le théorème du rang : introduire E_0, un supplémentaire de $\ker(f)$ et vérifier que f induit un isomorphisme de E_0 sur $\operatorname{Im}(f)$

Exercice 53 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u un automorphisme de E tel que, pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{u^k(x), k \in \mathbb{N}\}$ est fini.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^n(x) = x$ puis qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^N = id$.
2. Est ce encore vrai si on ne suppose plus u bijectif.

VI Trace

Exercice 54 *[Solution]*
Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, on souhaite déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $M + \operatorname{Tr}(AM)B = 0$.

1. On suppose que M vérifie $M + \operatorname{Tr}(AM)B = 0$, montrer que $\operatorname{Tr}(AM) = 0$ ou $1 + \operatorname{Tr}(AB) = 0$.
2. On suppose que $\operatorname{Tr}(AB) \neq -1$, conclure.
3. On suppose $\operatorname{Tr}(AB) = -1$, montrer que $M \in \operatorname{Vect}\{B\}$ et conclure.

Exercice 55 **(Centrale PSI 2009)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; résoudre l'équation $X + {}^tX = \operatorname{Tr}(X)A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 56 **(CCINP PSI 2018)** *[Solution]*
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = M + \operatorname{Tr}(M)A$.

1. Montrer que f est bijectif dès que $\operatorname{Tr}(A) \neq -1$.
2. On suppose $\operatorname{Tr}(A) = -1$. Donner $\ker(f)$ et montrer que $\operatorname{Im}(f)$ est l'ensemble des matrices de trace nulle.
3. Résoudre l'équation $X + (\operatorname{Tr} X)A = B$ d'inconnue X.

Exercice 57 **(CCP PSI 2018)** *[Solution]*
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\Delta_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M + {}^tM = \operatorname{Tr}(M)A\}$, $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n$ celui des matrices antisymétriques.

1. Montrer que Δ_A est un espace vectoriel.
2. Si $\operatorname{Tr}(A) \neq 2$, montrer que $\Delta_A = \mathcal{A}_n$.
3. Déterminer Δ_A si $\operatorname{Tr}(A) = 2$ et $A \notin \mathcal{S}_n$.
4. Si $A \in \mathcal{S}_n$ et $\operatorname{Tr}(A) = 2$, déterminer $\Delta_A \cap \mathcal{S}_n$ et en déduire Δ_A.

Exercice 58 **(Centrale PSI 2010)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \operatorname{Tr}(X) = 0 \Rightarrow \operatorname{Tr}(AX) = 0$. Montrer que A est une matrice scalaire (ie $A = \lambda I_n$)

Exercice 59 **(ENTPE-EIVP PC 2007)** *[Solution]*
Déterminer toutes les formes linéaires f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $f(AB) = f(BA)$ pour toutes matrices A et B.
indication : tester l'égalité sur les $E_{i,j}$, base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

VII Endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$

Exercice 60 **(CCP PSI 2016)** *[Solution]*
Soit $D = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$. Montrer que f, qui à $P \in \mathbb{R}_6[X]$ associe le reste de la division euclidienne de P par D, est une application linéaire de $\mathbb{R}_6[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$. Donner sa matrice dans les bases canoniques, son noyau et son image.

Exercice 61 **(CCP PSI 2016)** *[Solution]*
Montrer que f, défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} P(t)\,\mathrm{d}t$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Donner sa trace.

Exercice 62 **(EIVP PSI 2017)** *[Solution]*
Soit ϕ défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\phi(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme dont on donnera le noyau et l'image.
indication : si $P \in \ker(\phi)$, introduire $Q = P(X+1) - P(X)$.

2. Montrer que ϕ est nilpotent.

3. Montrer que $\forall Q \in \mathrm{Im}(\phi), \exists P \in \mathbb{R}_n[X], Q = \phi(P), P(0) = P'(0) = 0$

Exercice 63 **(CCP PSI 2013)** *[Solution]*
Donner M, matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, de $\phi : P \mapsto P(X+1)$. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

VIII Déterminants

Exercice 64 *[Solution]*
Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \det\left(\alpha^{|i-j|}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ où } \alpha \in \mathbb{C} \quad , \quad D_2 = \det\left(x+i+j-2\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad , \quad D_3 = \det\left(|i-j|\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

Exercice 65 **(Mines-Ponts PSI 2013)** *[Solution]*
Soit $D_n(x)$ le déterminant de la matrice ayant des $1+x^2$ sur la diagonale, des x juste au dessus et en dessous (si $|i-j| = 1$) et des 0 partout ailleurs.Trouver une relation entre $D_{n+2}(x)$, $D_{n+1}(x)$ et $D_n(x)$ et calculer $D_n(x)$.

Exercice 66 **(déterminant circulant)** *[Solution]*

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$. Calculer $\det(AM)$ et en déduire la valeur de $\det(A)$.

2. En utilisant les racines $n^{\text{ème}}$ de 1, généraliser à $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & & \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$

Exercice 67 **(CCP PSI 2016)** *[Solution]*
On pose $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $m_{i,j} = \begin{cases} b & \text{si } j > i \\ a & \text{si } i > j \\ r_i & \text{si } i = j \end{cases}$ où $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{K}^n$ et on note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Montrer que $x \mapsto \det(M + xJ)$ est une fonction affine (polynômiale de degré $\leqslant 1$).

2. En déduire, lorsque $a \neq b$, la valeur de $\det(M + xJ)$ puis de $\det(M)$.

3. *question rajoutée :* pour $a = b$, en calculant, pour $\varepsilon > 0$, $\det(M_\varepsilon)$ où M_ε est la matrice obtenue en ajoutant ε aux coefficients de M strictement au dessus de la diagonale, calculer la valeur de $\det(M)$.

Exercice 68 **(Mines-Ponts PSI 2017)** *[Solution]*
Soient $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(I_q - AB) = \det(I_p - BA)$.
indication calculer $\begin{pmatrix} I_p & -B \\ -A & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_p & B \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$.

Exercice 69 **(CCP PSI 2009)** *[Solution]*

1. Montrer que si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(C + X) = \det X$ alors $C = 0$.
indication donnée : on pourra chercher le rang de C ; indication rajoutée : écrire $C = PJ_rQ^{-1}$.

2. Montrer que si A et B vérifient alors $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(A + X) = \det(B + X)$ alors $A = B$.

Exercice 70 **(Centrale PC 2010)** *[Solution]*
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent.

1. Montrer que $\det\left(A^2 + B^2\right) \geqslant 0$.
indication : $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$

2. Montrer que $\det\left(A^{2k} + B^{2k}\right) \geqslant 0$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

3. On suppose $\det(A + B) \geqslant 0$, montrer que $\det\left(A^{2k+1} + B^{2k+1}\right) \geqslant 0$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 71 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*
E est l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de fonctions de E.

1. On suppose qu'il existe des réels $x_1, \dots, x_n$ tels que $\det\left((f_i(x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right) \neq 0$; montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.
indication : Utiliser la définition d'une famille libre puis introduire un système linéaire.
2. Réciproquement, on suppose que $(f_1, \dots, f_n)$ est libre ; montrer par récurrence qu'il existe $x_1, \dots, x_n$ tels que $\det\left((f_i(x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right) \neq 0$.
indication : L'HR est « si $(g_, \dots, g_{n-1})$ est libre alors il existe $x_1, \dots, x_{n-1}$ tel que $\det(g_i(x_j)) \neq 0$ ». Choisir x_n de sorte que $f_n(x_n) \neq 0$ puis simplifier le déterminant par manipulations sur les rangées.

Exercice 72 **(Centrale PSI 2022)** *[Solution]*

Soient $P_0 = 1$ et $P_k = \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(X - i)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

1. Montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels et $b_1, \dots, b_n$ des entiers naturels deux à deux distincts. On pose $Q(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i X^{b_i}$ et on suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = (X-1)^n P$.
Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i P_k(b_i)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.
indication : distinguer $k \leqslant n-1$ et $k = n$
3. On pose $B_i = \begin{pmatrix} 1 \\ b_i \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i B_i$. Calculer S_n en fonction de $n!P(1)$.
indiction : utiliser Q1
4. En considérant le déterminant de $(S_n, B_1, \dots, B_n)$, calculer $P(1)$.

Solutions

Exercice 1 *[sujet]* Par récurrence sur k ($k = 1$ facile), si on suppose HR au rang k et si $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i f_i + \beta_i g_i = 0$, on dérive deux fois puis par combinaison linéaire des deux lignes $\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i((k+1)^2 - i^2)f_i + \beta_i((k+1)^2 - i^2)g_i) = 0$ et par HR, $\alpha_i((k+1)^2 - i^2) = \beta_i((k+1)^2 - i^2) = 0$ pour $i \leqslant k$; on en déduit $\alpha_i = \beta_i = 0$ si $i \leqslant k$ puis $\alpha_{k+1} = \beta_{k+1} = 0$ en reprenant l'égalité initiale.

Exercice 2 *[sujet]*

1. Si $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n = 0$ et $x_p = \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2} + 2p\pi\right)$ alors $\alpha_1 f_1(x_p) + \cdots + \alpha_n f_n(x_p) \underset{p \to +\infty}{\sim} \alpha_n x_p^n$ si $\alpha_n \neq 0$; on a donc $\alpha_n = 0$ puis la liberté par récurrence sur n.
2. Si $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n = 0$ alors $P = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n X^{n-1}$ s'annule en tous points de $f([0, 1])$ (car $f(x) \neq 0$) et $\deg(P) \leqslant n - 1$; si $\mathrm{Card}(f([0, 1])) \geqslant n$, $P = 0$ donc $\alpha_i = 0$ et la famille est libre. Par contre, si $\mathrm{Card}(f([0, 1])) = p < n$, on pose $P = \prod_{i=1}^{p}(X - x_i)$ où $f([0, 1]) = \{x_1, \ldots, x_p\}$; la forme développée de P est $P = \alpha_0 + \cdots + \alpha_p X^p$ avec les α_i non tous nuls et on vérifie $\alpha_0 f_1 + \cdots + \alpha_p f_{p+1} = 0$ donc la famille est liée.

Exercice 3 *[sujet]* Si $\sum \alpha_k P_k = 0$, en $X = 0$ on trouve $\alpha_0 = 0$, puis on divise la ligne par X et en $X = 0$, on trouve $\alpha_1 = 0$ ...(rédiger une récurrence).

$$1 = (X + (1 - X))^{n-k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} X^i (1 - X)^{n-k-i} \text{ donc } X^k = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} X^{k+i}(1 - X)^{n-k-i} \underset{j=k+i}{=} \sum_{j=k}^{n} \binom{n-k}{j-k} P_j.$$

Exercice 4 *[sujet]* $X \in \ker(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x_k = (-1)^{k+1} x_1 & \text{si } 2 \leqslant k \leqslant n \\ (1 + (-1)^{n+1})x_1 = 0 \end{cases}$ donc si n est impair, M est inversible. Par contre si n est pair, $\ker(M) = \mathrm{Vect}\{(1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1)\}$ donc $\mathrm{rg}(M) = n - 1$ et $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}\{C_2, \ldots, C_n\}$

Exercice 5 *[sujet]* On a $C_j = \sin(j)S + \cos(j)C$ où $S = \begin{pmatrix} \sin(1) \\ \vdots \\ \sin(n) \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} \cos(1) \\ \vdots \\ \cos(n) \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(A) \leqslant 2$ puis $\mathrm{rg}(A) = 2$ car (C_1, C_2) est libre.

Exercice 6 *[sujet]* Si $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par f : on a $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ donc $x = a + b$ avec $p(a) = 0$ et $p(b) = b$; on calcule $f \circ p(x) = f(b)$ et $f(x) = f(a) + f(b)$. Par stabilité des deux sev, on a $f(a) \in \ker(p)$ et $f(b) \in \mathrm{Im}(p)$ donc $p \circ f(x) = p \circ f(b) = f(b)$. On conclut $p \circ f = f \circ p$. Réciproque faite en cours pour n'importe quel endomorphisme.

Exercice 7 *[sujet]* On a $\ker(A) = \mathrm{Vect}\{(1, -2, 1)\}$, $\ker(A - 2I_3) = \mathrm{Vect}\{(3, 4, -1)\}$ et $\ker(A + 2I_3) = \mathrm{Vect}\{(1, 0, -1)\}$ donc si $u_0 + u_2 + u_{-2} = 0$, on a $u_0 = \alpha(1, -2, 1)$, $u_2 = \beta(3, 4, -1)$ et $u_{-2} = \gamma(1, 0, -1)$; après résolution $\alpha = \beta = \gamma = 0$ donc $u_0 = u_2 = u_{-2} = 0$ donc la somme est directe ; avec les dimensions $\dim \ker(A) + \dim \ker(A - 2I_3) + \dim \ker(A + 2I_3) = \dim \mathbb{R}^3$ d'où le résultat.

Exercice 8 *[sujet]*

1. $f_i = f_i^2$
2. Avec $id = f_1 + \cdots + f_k$ on trouve $E = \sum \mathrm{Im}(f_i)$; la somme est directe car si $\sum u_i = 0$ avec $u_i = f_i(u_i)$ (car projecteur), en composant par f_j, on trouve $0 = f_j(u_j) = u_j$.
3. $f^p = \sum_{i=1}^{k} a_i^p f_i$ par récurrence sur p.
4. Si $\sum \alpha_i f_i = 0$, en composant par f_j, on trouve $\alpha_j f_j^2 = 0$ donc $\alpha_j = 0$ car $f_j^2 = f_j \neq 0$. La famille $(id, f, \ldots, f^k)$ est liée car contient $k + 1$ vecteurs de $\mathrm{Vect}\{f_1, \ldots, f_k\}$ qui est de dimension k.
5. On calcule le déterminant de cette famille de vecteurs dans la base $(f_1, \ldots, f_k)$, c'est le $V(a_1, \ldots, a_k)$.

Exercice 9 *[sujet]*

1. Comme $id = \sum f_i$, on a $E = \sum \mathrm{Im}(f_i)$ puis $\dim(E) = \dim \sum \mathrm{Im}(f_i) \leqslant \sum \mathrm{rg}(f_i) \leqslant n$ donc toutes ces dimensions sont égales, la somme est donc directe.
2. On compose $id = \sum f_i$ à droite par f_j et on trouve $\sum_{i \neq j} f_i \circ f_j(x) + (f_i^2 - f_i(x)) = 0$ comme la somme des $\mathrm{Im}(f_i)$ est directe, on en déduit $f_i \circ f_j(x) = 0$ si $i \neq j$ et $f_j^2(x) = f_j(x)$ (qui est valable pour x qlcque).

Exercice 10 *[sujet]*

1. On trouve $\ker(f) = \mathrm{Vect}\{e_2 + e_3\}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{e_1 + e_2 + e_3, 3e_1 + 2e_2 + 3e_3\}$ donc $\mathrm{rg}(f) = 2$.
2. $S = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

3. $SM = (SM)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrice de la projection sur $\mathrm{Vect}\{e_1+e_2+e_3, e_2\}$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\{e_2+e_3\}$.

4. $SM = P$ est un projecteur donc $M = SP$ et on vérifie $SP = PS$

Exercice 11 *[sujet]* **1.** Par changement d'indice en réordonnant la somme.

2. On a $\mathrm{Im}(p \circ u^{n-k}) \subset V$ et V est stable par u^k. On a $q(x) \in \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p)$ donc $p \circ q(x) = q(x)$ puisque p est un projecteur.

3. $\mathrm{rg}(q) = \mathrm{Tr}(q) = \mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$ et $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p)$ donc $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(q)$.

4. On vérifie que $\ker(q)$ est un supplémentaire de V (car projecteur) stable par u car $u \circ q = q \circ u$.

Exercice 12 *[sujet]* **1.** $(f \circ g)^2 = f \circ (g \circ f) \circ g = f \circ g$ projecteur donc $\mathrm{rg}(f \circ g) = \mathrm{Tr}(f \circ g) = \mathrm{Tr}(g \circ f) = p$.

2. On a $\mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \mathrm{rg}(f)$ donc $\mathrm{rg}(f) \geqslant p$ et comme $f \in \mathcal{L}(R^p, R^n)$, on a aussi $\mathrm{rg}(f) \leqslant p$ puis $\mathrm{rg}(f) = p$; de même on trouve $\mathrm{rg}(g) = p$. Ensuite, par le th du rang, f est injective et $\mathrm{rg}(g) = p$ donne g surjective. Enfin $f \circ g \circ f \circ g = f \circ g$ donc $f \circ (g \circ f \circ g - g) = 0$ donne $g \circ f \circ g - g = 0$ car f injective puis $(g \circ f - id) \circ g = 0$ donne $g \circ f - id = 0$ car g est surjective.

Exercice 13 *[sujet]* Soit H tel que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus H$ et $\mathcal{B}$ une base adaptée, on a $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ & (0) & \end{pmatrix}$ puisque $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$. Comme $\mathrm{Tr}(f) = 1$, on a $a_1 = 1$ et on vérifie alors $M^2 = M$.

Exercice 14 *[sujet]* **1.** $\ker(A^2) = \mathrm{Vect}\{(1,-1,0),(1,0,1)\}$ et $\ker(A - 2I_3) = \mathrm{Vect}\{(1,1,0)\}$ puis vérif facile

2. $(1,-1,0)$ convient car $f(1,-1,0) = (0,-4,-4)$ puis $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. A^2 commute avec B ; si f est l'endomorphisme induit par A sur $\ker(f^2)$, on a f^2 donc l'endomorphisme induit par B sur $\ker(A^2)$ vérifierait $g^4 = 0$. Comme $\dim(\ker(A^2)) = 2$, on aurait $g^2 = 0$ donc $f = 0$ ce qui est absurde.

Exercice 15 *[sujet]* **1.** Si $x = a + b$ avec $f(a) = f^2(b) + b = 0$ alors $a = f^2(x) + x$ et $b = x - a$ donc la décomposition est unique si elle existe et si on pose $a = x + f^2(x)$ et $b = x - a$, on a $x = a + b$, $f(a) = f(x) + f^3(x) = 0$ donc $a \in \ker(f)$ et $f^2(b) + b = f^2(x) + x - f^2(a) - a = f^2(x) + x - a = 0$ donc $b \in \ker(f^2 + id)$ et $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + id)$. Si on avait $\ker(f^2 + id) = \{0\}$, on aurait $\mathbb{R}^3 = \ker(f)$ donc $f = 0$, absurde

2. comme $x \neq 0$, si $(x, f(x))$ est liée alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$ donc $f^2(x) = \lambda^2 x$ et $0 = f^2(x) + x = (\lambda^2 + 1)x$ ce qui est absurde car $x \neq 0$ et $1 + \lambda^2 \neq 0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

3. on vient de prouver $\dim(\ker(f^2 + id)) \geqslant 2$ et si on avait $\dim(\ker(f^2 + id)) = 3$ alors on aurait $f^2 + id = 0$ donc $f^2 = -id$ puis $\det(f)^2 = \det(-id) = (-1)^3 = -1$ ce qui est absurde. On a donc $\dim(\ker(f^2 + id)) = 2$ et $\dim(\ker(f)) = 1$

4. il suffit de prendre une base adaptée à la décomposition de la première question en prenant une base de $\ker(f^2 + id)$ de la forme $(x, f(x))$.

5. Si $f = u^2$ alors $u \circ f = f \circ u = u^3$ donc u et f commutent donc $\ker(f)$ et $\ker(f^2 + id)$ sont stables par u. Dans la base précédente, la matrice de u est donc de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\alpha^2 = 0$ donc $\alpha = 0$ et $A^2 = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme A et B commutent, A est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ puis $\begin{cases} a^2 = b^2 \\ 2ab = -1 \end{cases}$ donc $a = -b$ $(ab < 0)$ et $2a^2 = 1$; on a donc deux solutions $\pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, donc $u = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}(f - f^2)$

Exercice 16 *[sujet]* i⇒ii si $x \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ alors $f(x) = 0$ et $x = f(a)$ donc $0 = f(x) = f^2(a)$, ie $a \in \ker(f^2) = \ker(f)$ donc $x = f(a) = 0$; le th du rang donne la fin

ii⇒iii dans une base adaptée la matrice a cette forme et $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(U) = r$ et $U \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ par construction donc U est inversible.

iii⇒i Calculer le carré ; U est inversible donc si $M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0$ si et seulement si $UY = 0 \Leftrightarrow Y = 0$; de même pour M^2.

Exercice 17 *[sujet]* On a $n = \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) - \dim(\ker(f) \cap \ker(g)) = n - \mathrm{rg}(f) + n - \mathrm{rg}(g) - \dim(\ker(f) \cap \ker(g))$ donc $n = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) + \dim(\ker(f) \cap \ker(g)) = \dim(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)) + \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)) + \dim(\ker(f) \cap \ker(g))$ donc $\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)) + \dim(\ker(f) \cap \ker(g)) = 0$, les deux sont donc nulles

Exercice 18 *[sujet]* **1.** Si $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f \circ)$ et $x \in E$, on a $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ donc il existe $y \in E$ tel que $f(x) = f \circ g(y)$, ie $x - g(y) \in \ker(f)$, on écrit alors $x = g(y) + (x - g(y)) \in \mathrm{Im}(g) + \ker(f)$.
Récip : si $E = \mathrm{Im}(g) + \ker(f)$ et $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et $x = g(a) + b$ avec $b \in \ker(f)$; on a donc $y = f \circ g(a) \in \mathrm{Im}(f \circ g)$ (inclusion inverse toujours vraie).

2. Si $\ker(f) = \ker(g \circ f)$ et $x \in \mathrm{Im}(f) \cap \ker(g)$ alors $x = f(a)$ et $g(x) = 0$ donc $a \in \ker(g \circ f)$ puis $f(a) = 0$ donc $x = 0$.
Récip : si $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g) = \{0\}$ et $x \in \ker(g \circ f)$ alors $f(x) \in \ker(g) \cap \mathrm{Im}(f)$ donc $f(x) = 0$ et $x \in \ker(f)$ (inclusion inverse toujours vraie).

Exercice 19 *[sujet]* **1.** $AM = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}(M) \subset \ker(A) = \mathrm{Vect}\{(1, -3)\}$ donc (les colonnes de M sont dans $\ker(A)$) on a $\ker(f) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\right\}$; $\mathrm{rg}(f) = 2 \neq \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et f n'est pas surjectif.

2. $\mathrm{rg}(f) = 2$ par le th du rang ; $A = f(I_2)$ et $B = f(A)$ sont deux vecteurs libres de $\mathrm{Im}(f)$ donc en forment une base.

Exercice 20 *[sujet]* On suppose $a_0 \neq 0$ et soit $Q \in \mathbb{K}[X]$; on pose $k = \deg(Q)$ et $\varphi : P \in \mathbb{K}_k[X] \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i P^{(i)} \in \mathbb{K}_k[K]$ qui est un endomorphisme. En écrivant la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_k[X]$ (triangulaire supérieure avec a_0 sur toute la diagonale), on vérifie que φ est bijective donc $\exists! P \in \mathbb{K}_k[X], Q = \varphi(P)$; ce sera aussi la seule solution dans $\mathbb{K}[X]$ car si P est une solution, par degrés étagés des $P^{(i)}$, on aura nécessairement $\deg(P) = \deg(Q) = k$ donc $Q = \varphi(P)$.
Récip : avec $Q = 1$ il existe un unique P tel que $1 = \sum_{i=0}^{n} a_i P^{(i)}$ donc $\deg(P) = 0$ (P est constant non nul), il reste $1 = a_0 \times \lambda$ donc $a_0 \neq 0$.

Exercice 21 *[sujet]* **1.** $M^2 = M$ donc f est un projecteur, parallèlement à $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}\{(0, -1, 1), (-1, 0, 1)\}$ sur $\ker(M) = \mathrm{Vect}\{(1, 1, -1)\}$

2. Dans $\mathcal{B}$ adaptée à $E = \ker(M) \oplus \mathrm{Im}(M)$, on a $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A'B'$.
Avec P la matrice de passage, on a $M = PM'P^{-1} = (PA')(B'P^{-1})$

3. Si $M = AB$ alors $M^2 = M$ donne $ABAB = AB$; on a $2 = \mathrm{rg}(M) \leqslant \mathrm{rg}(A)$ donc $\mathrm{rg}(A) = 2$ et $\ker(A) = \{0\}$ puis $A(BAB - B) = 0$ donne $\mathrm{Im}(BAB - B) \subset \ker(A)$ et $BAB = B$. Puis $\mathrm{rg}(M) \leqslant \mathrm{rg}(B)$ donne aussi $\mathrm{rg}(B) = 2$ donc $\mathrm{Im}(B) = \mathbb{R}^2$ et $(BA - I_2)B = 0$ donne $\mathrm{Im}(B) \subset \ker(BA - I_2)$ donc $BA = I_2$.

Exercice 22 *[sujet]* **1.** Si $x = a + b$ avec $u(a) = 0$ et $b = v(c)$ alors $u(x) = u \circ v(c)$ puis $b = v(c) = v \circ u \circ v(c) = v \circ u(x)$ est unique, tout comme $a = x - b = x - v \circ u(x)$. Réciproquement, pour $x \in E$, on pose $b = v \circ u(x)$ et $a = x - b$; on a $a + b = x$, $b \in \mathrm{Im}(v)$ et $u(a) = u(x) - u \circ v \circ u(x) = 0$

2. $\mathrm{rg}(u) = \dim(E) - \dim(\ker(u)) = \dim(\mathrm{Im}(v)) = \mathrm{rg}(v)$

Exercice 23 *[sujet]* **1.** $(f \circ g)^2 = (f \circ g \circ f) \circ g = f \circ g$, idem pour l'autre

2. $f = f \circ (g \circ f)$ donc $\ker(g \circ f) \subset \ker(f)$, inclusion inverse toujours vraie. De même $f = (f \circ g) \circ f$ donne $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f \circ g)$, inclusion inverse toujours vraie.

3. $f = f \circ g \circ f$ donne $\mathrm{rg}(f) \leqslant \mathrm{rg}(g)$, la deuxième donne l'autre sens.

4. On a $E = \ker(f \circ g) \oplus \mathrm{Im}(f \circ g) = \ker(f \circ g) \oplus \mathrm{Im}(f)$; de plus $\ker(g) \subset \ker(f \circ g)$ et $\dim \ker(f \circ g) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f \circ g) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f) = \dim(E) - \mathrm{rg}(g) = \dim \ker(g)$ donc $\ker(g) = \ker(f \circ g)$ et $E = \ker(g) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Pour $x = a + f(b)$ avec $g(a) = 0$, on a $g(x) = g \circ f(b)$ et $g \circ f \circ g(x) = g \circ (f \circ g \circ f)(b) = g \circ f(b) = g(x)$.

Exercice 24 *[sujet]* Si $x \in \ker(v) \cap \mathrm{Im}(u)$ alors $x = u(a)$ et $0 = v(x) = v \circ u(a)$ donc $a = 0$ puis $x = 0$. De plus, si $y \in F$ alors $v(y) \in E$ donc il existe $a \in F$ tel que $v(y) = v \circ u(a)$, ie $y - u(a) \in \ker(v)$. On écrit alors $y = (y - u(a)) + u(a) \in \ker(v) + \mathrm{Im}(u)$.

Exercice 25 *[sujet]* Si $M = AB$ alors $\mathrm{rg}(M) \leqslant \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)) \leqslant k$ donc $\mathrm{rg}(M)$ minore l'ensemble. De plus avec $M = PJ_rQ^{-1}$ et $J_r = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix} = A'B'$ donc $M = (PA')(B'Q^{-1})$ donc $r = \mathrm{rg}(M)$ appartient à l'ensemble.

Exercice 26 *[sujet]* **1.** Soient f associé à A non bijectif, $\mathcal{B}$ adaptée à $E = \ker(f) \oplus E_0$ et $\mathcal{B}'$ adaptée à $E = \mathrm{Im}(f) \oplus F_0$. On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & M \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et $M \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ non inversible car la dernière ligne au moins de M est nulle. On termine par récurrence sur n en appliquant l'HR à M.

2. On vérifie $f(0) = 0$: $f(0) = f(0^2) = f(0)^2$ donc $f(0) \in \{0, 1\}$; si $f(0) = 1$ alors $f(0) = f(0M) = f(0)f(M) = f(M)$ donc $f = 1$ absurde. On a ensuite $f(A^n) = f(A)^n$ donc $f(A) = 0$ pour toute matrice nilpotente. Si A n'est pas inversible alors $A = PNQ^{-1}$ avec N nilpotente donc $f(A) = f(P)f(N)f(Q^{-1}) = 0$ car $f(N) = 0$.

Exercice 27 *[sujet]* Si $BX = 0$ alors $ABX = 0$ puis $AX = 0$ donc $\ker(B) \subset \ker(A)$. En transposant, on a ${}^tB\,{}^tA = {}^tA + {}^tB$ donc $\ker({}^tA) \subset \ker({}^tB)$ ce qui donne avec le th du rang et $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$ $\ker(A) = \ker(B)$.

Exercice 28 *[sujet]* Si f est bijectif et $x \in f(A) \cap f(B)$ alors $x = f(a) = f(b)$ donc $a - b \in \ker(f) = \{0\}$ donne $a = b \in A \cap B$ donc $a = b = 0$ et $x = 0$; de plus $\dim f(A) + \dim f(B) = \dim(A)9 + \dim(B) = \dim(E)$ donc $E = f(A) \oplus f(B)$.
Réciproquement : si $E = f(A) \oplus f(B)$ et $y \in E$ alors $y = f(a) + f(b) = f(a + b)$ donc f est surjectif donc bijectif en dimension finie.
En dimension qlcque : $\mathbb{R}[X] = A \oplus B$ avec A les polynômes pairs et B les impairs, $d : P \mapsto P'$ n'est pas bijectif mais $d(A) = B$ et $d(B) = A$ sont supplémentaires.

Exercice 29 *[sujet]* Soit A une telle matrice et B de rang 1, si $AB = BA$ alors $\mathrm{Im}(B)$ est une droite stable ; soit D une droite, il existe un endomorphisme de rang 1 dont l'image est D (un projecteur sur D), D est stable par A. Toute droite est donc stable par A. Si on choisit une base (e_i), les droites $\mathrm{Vect}\{e_i\}$ sont stables par A donc (cf cours) A est diagonale ; en utilisant la stabilité des $\mathrm{Vect}\{e_i + e_j\}$, on trouve que $A = \lambda I_n$; la réciproque est évidente.

Exercice 30 *[sujet]*

1. $N^3 = 0$ et N commute avec I_3 donc, si $n \geqslant 2$, $M^n = I_3 + nN + \binom{n}{2} N^2$
2. On a donc $M^n \in \mathrm{Vect}\{I_3, N, N^2\}$ puis $M = I_3 + N$, $M^2 = I_3 + 2N + N^2$ et $M^3 = I_3 + 3N + 4N^2$ qui permet de prouver $I_3, N, N^2 \in \mathrm{Vect}\{M^n, n \geqslant 1\}$. On vérifie (I_3, N, N^2) libre donc est une base de F et $\dim(F) = 3$.
3. On a $F \subset C(M)$ et on vérifie $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in C(M)$ si et seulement si $d = g = h = 0$, $a = e = i$, $b = f$ donc $M = aI_3 + bN + \dfrac{c-b}{2} N^2 \in F$ donc $F = C(M)$

Exercice 31 *[sujet]*

1. Soit x_0 tel que $f^{p*-1}(x_0) \neq 0$; si $\sum \alpha_k f^k = 0$ on montre $\alpha_{p-1} = 0$ puis $\alpha_{p-2} = 0, \ldots$en composant successivement par f^{p-1} puis f^{p-2} $\ldots$(rédiger une récurrence)
2. Soit p l'entier précédent ; il s'agit de prouver que $p \leqslant n$. Il existe x_0 tel que $(x_0, \ldots, f^{p-1}(x_0))$ soit libre, or c'est une famille de p vecteurs, donc $p \leqslant n$.

Exercice 32 *[sujet]*

1. non
2. fait plusieurs fois
3. si $f = g^2$ alors $g^{2p} = 0$ donc g est nilp et $g^{2p-2} = f^{p-1} \neq 0$ donc $2p - 2 \leqslant n - 1$

Exercice 33 *[sujet]*

1. Prendre a tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$ et montrer par récurrence (forte) que si $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(a) = 0$ alors $\alpha_k = 0$ (en composant par f^{n-1} pour commencer, puis f^{n-2},...)
2. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (la même que T en taille n). $\det(f) = 0$ (matrice triangulaire inférieure)
3. a) oui, on vient de le faire

   b) On vérifie que $MN = NM$ si et seulement si $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix} = aI_3 + dM + gM^2$ donc si $g \circ f = f \circ g$ alors $g \in \mathbb{R}_2[f]$; récip évidente.

Exercice 34 *[sujet]* Si $f^n = 0$ alors $(id - f) \circ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f^i = id$ donc $(id - f)^{-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f^i$.

Soit $d : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P'$, on a $d^{n+1} = 0$ et $U = id - d$ donc la solution est $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} d^i(X^n)$.

Exercice 35 *[sujet]* Si $A^2 = 0$ alors $\mathrm{Im}(A) \subset \ker(A)$ et le th du rang donne $\dim \mathrm{Im}(A) + \dim \ker(A) = n$ donc $r = \mathrm{rg}(A) \leqslant \dfrac{n}{2}$. On choisit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(A)$ que l'on complète en $(e_1, \ldots, e_{n-r})$ une base de $\ker(A)$ puis $e_{n-r+1}, \ldots, e_n$ tels que $e_1 = u(e_{n-r+1}, \ldots, e_r = u(e_n)$. Reste à vérifier que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base : si $\sum \alpha_i e_i = 0$, en composant par u, il reste $\displaystyle\sum_{i=n-r+1}^{n} \alpha_i e_i = 0$ donc $\alpha_i = 0$ pour $i \geqslant n - r + 1$, reste $\displaystyle\sum_{i \leqslant n-r} \alpha_i e_i = 0$ et $\alpha_i = 0$ pour $i \leqslant n - r$ par construction de cette famille.
Récip : on vérifie $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$.

Exercice 36 *[sujet]* Si $f \circ f = 0$, on introduit une base de E $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_{n-2r}, e_{n-2r+1}, \dots, e_n)$ de sorte que $(e_1, \dots, e_r)$ base de $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$ et $(e_1, \dots, e_{n-2r})$ base de $\ker(f)$, il manque alors r vecteurs (th du rang). On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on vérifie que le produit dans l'autre sens est nul.
La réciproque est facile.

Exercice 37 *[sujet]*

1. Soient F' et G' des supplémentaires de F et G dans E puis $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ des bases adaptées à $E = F \oplus F'$ et $E = G \oplus G'$. Il suffit ensuite de prendre u tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $r = \dim(F) = \dim(G')$ (donc le bloc en haut à droite est bien carré). Récip par le th du rang.
2. On a $G \subset F$; si on pose $u_1 = (1, -1, 0)$ puis $u_2 = (1, 0, -1)$, on a $F = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2\}$. On complète avec $u_3 = (0, 0, 1)$ de sorte que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$. Il suffit ensuite de prendre $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 38 *[sujet]* Par récurrence sur k : pour $k = 1$, f_1 est nilpotent donc non bijectif et $\mathrm{rg}(f_1) \leqslant n - 1$. Si on pose $g = f_1 \circ \cdots \circ f_k$ et qu'on suppose $\mathrm{rg}(g) \leqslant n - k$, f_{k+1} commute avec g donc $\mathrm{Im}(g)$ est stable par f_{k+1}. L'endomorphisme induit par f_{k+1} sur $\mathrm{Im}(g)$ reste nilpotent donc n'est pas bijectif ; on en déduit que l'inclusion $f_{k+1}(\mathrm{Im}(g)) = \mathrm{Im}(f_{k+1} \circ g) \subset \mathrm{Im}(g)$ est stricte et par HR, on a $\mathrm{rg}(g \circ f_{k+1}) \leqslant n - k - 1$.
Pour $k = n$, on en déduit $f_1 \circ \cdots \circ f_n = 0$.

Exercice 39 *[sujet]*

1. On vérifie que si x_0 est tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$ alors $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E. Comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on vérifie toutes ces inclusions.
2. Et aussi $\dim(N_k) = k$, $\mathrm{rg}(f^k) = n - k$
3. Si F est stable par f alors l'endomorphisme g induit par f sur F reste nilpotent, soit p son indice ; comme $g^p = 0$, on a $F \subset N_p$ et en prenant $y_0 \in f$ tel que $g^{p-1}(y_0) \neq 0$, on prouve que $(y_0, \dots, g^{p-1}(y_0))$ est une famille libre de F donc $\dim(F) \geqslant p$. Comme $\dim(N_p) = p$, on en déduit $F = N_p$. Réciproquement tous les N_k sont stables par f.
4. Pour $i = j$ vu les dimensions.

Exercice 40 *[sujet]*

1. $H = \ker(\mathrm{Tr})$ est un sev, N ne l'est pas car $E_{1,2}$ et $E_{2,1}$ sont dans N ($E_{1,2}^2 = E_{2,1}^2 = 0$) alors que $E_{1,2} + E_{2,1} \notin E$ car $(E_{1,2} + E_{2,1})^{2p} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est jamais nulle.
2. On vérifie $\mathrm{Vect}(N) = H$: si u est un endomorphisme nilpotent, $\ker(u) \neq \{0\}$ et dans une base adaptée à $\mathbb{R}^n = \ker(u) \oplus F$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$; comme $u^p = 0$, on a $C^p = 0$. On vérifie alors par récurrence sur n (la taille des matrices) que $\mathrm{Tr}(u) = 0$ (ça peut aussi se faire facilement en utilisant les valeurs propres de u après le chapitre sur la réduction).
Réciproquement, si A est de trace nulle, on prouve par récurrence sur n que A est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle (évident si $n = 1$) : on commence par prouver qu'il existe x tel que $(x, f(x))$ soit libre ; si ce n'est pas le cas, on vérifie que toutes les droites sont stables par f donc (cf cours) $f = \lambda id$ et comme $\mathrm{Tr}(f) = 0$, on a $f = 0$. On introduit une base de $\mathbb{R}^n$ de la forme $(e_1, f(e_1), e_3, \dots, e_n)$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A' \end{pmatrix}$ avec $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Comme $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(A')$, on applique l'HR à $A' = PMP^{-1}$ avec M à diagonale nulle puis en utilisant $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$, dont l'inverse est $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$, on vérifie que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & LP \\ P^{-1}C & M \end{pmatrix}$ qui est de diagonale nulle. On peut alors écrire cette matrice à diagonale nulle comme la somme d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure de diagonales nulles qui sont donc toutes deux nilpotente. Toute matrice de trace nulle est donc la somme de deux matrices nilpotentes.

Exercice 41 *[sujet]* Si $x \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ alors $x = f(a)$ et $f(x) = 0$ donc $x = f(a) = -f^4(a) = 0$; le th du rang permet de conclure.
En dimension qlcque, par analyse et synthèse, on trouve $x = (x + f^3(x)) - f^3(x) \in \ker(f) + \mathrm{Im}(f)$ donc le résultat reste valable.

Exercice 42 *[sujet]*

1. $(f^2 + f + id) \circ (f - id) = 0$

2. Si $x=a+b$ avec $f(a)=a$ et $b=f(c)-c$ alors $(f^2+f+id)(x)=3a$ donc a, puis b sont uniques. Réciproquement, on pose $a=\dfrac{1}{3}(f^2(x)+f(x)+x)$ et $b=x-a$; on a $a+b=x$, $f(a)=a$ et on vérifie $(f^2+f+id)(b)=0$ donc $b\in\operatorname{Im}(f-id)$

Exercice 43 *[sujet]* **1.** Si $x=a+b$ avec $f(a)=f^2(b)+b=0$ alors $a=f^2(x)+x$ et $b=x-a$ donc la décomposition est unique si elle existe et si on pose $a=x+f^2(x)$ et $b=x-a$, on a $x=a+b$, $f(a)=f(x)+f^3(x)=0$ donc $a\in\ker(f)$ et $f^2(b)+b=f^2(x)+x-f^2(a)-a=f^2(x)+x-a=0$ donc $b\in\ker(f^2+id)$ et $\mathbb{R}^3=\ker(f)\oplus\ker(f^2+id)$. Si on avait $\ker(f^2+id)=\{0\}$, on aurait $\mathbb{R}^3=\ker(f)$ donc $f=0$, absurde

2. comme $x\neq 0$, si $(x,f(x))$ est liée alors il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=\lambda x$ donc $f^2(x)=\lambda^2x$ et $0=f^2(x)+x=(\lambda^2+1)x$ ce qui est absurde car $x\neq 0$ et $1+\lambda^2\neq 0$ ($\lambda\in\mathbb{R}$)
3. on vient de prouver $\dim(\ker(f^2+id))\geqslant 2$ et si on avait $\dim(\ker(f^2+id))=3$ alors on aurait $f^2+id=0$ donc $f^2=-id$ puis $\det(f)^2=\det(-id)=(-1)^3=-1$ ce qui est absurde. On a donc $\dim(\ker(f^2+id))=2$ et $\dim(\ker(f))=1$
4. il suffit de prendre une base adaptée à la décomposition de la première question en prenant une base de $\ker(f^2+id)$ de la forme $(x,f(x))$.
5. Si $f=u^2$ alors $u\circ f=f\circ u=u^3$ donc u et f commutent donc $\ker(f)$ et $\ker(f^2+id)$ sont stables par u. Dans la base précédente, la matrice de u est donc de la forme $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & A\end{pmatrix}$ avec $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\alpha^2=0$ donc $\alpha=0$ et $A^2=B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Comme A et B commutent, A est de la forme $A=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$ puis $\begin{cases}a^2=b^2\\ 2ab=-1\end{cases}$ donc $a=-b$ ($ab<0$) et $2a^2=1$; on a donc deux solutions $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$, donc $u=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(f-f^2)$

Exercice 44 *[sujet]* Si $u=\displaystyle\sum_{k=2}^{p}\alpha_iu^i$ et $x\in\ker(u)\cap\operatorname{Im}(u)$ alors $u(x)=0$ et $x=u(a)$ donc $u^2(a)=0$ et $x=u(a)=\displaystyle\sum_{i=2}^{p}\alpha_iu^i(a)=0$; le th du rang permet de conclure.

Réciproquement : soit P un polynôme annulateur non nul de u, $P=\displaystyle\sum_{i=r}^{d}\alpha_iX^i$ avec $\alpha_r\neq 0$; si $r=0$, on remplace P par XP et si $r=1$ par X^2P de sorte que l'on peut se ramener à $r\geqslant 2$. On a alors $u^r\circ\displaystyle\sum_{i=r}^{d}\alpha_iu^{i-r}=0$ ce qui donne $\operatorname{Im}\left(\displaystyle\sum_{i=r}^{d}\alpha_iu^{i-r}\right)\subset\ker(u^r)$; on vérifie que $E=\ker(u)\oplus\operatorname{Im}(u)$ donne $\ker(u)=\ker(u^r)$ dont on déduit $u\circ\displaystyle\sum_{i=r}^{d}\alpha_iu^{i-r}=0$ qui donne le résultat en redeveloppant l'expression et en divisant par α_r.

Exercice 45 *[sujet]* On vérifie $(A+(a-b)I_n)^2=na(A+(a-b)I_n)$ donc $(X+(a-b))(X+(1-n)a-b)$ annule A. Si $P(0)=(a-b)((1-n)a-b)\neq 0$ alors A est inversible et $A^{-1}=\dfrac{1}{P(0)}(A+((2-n)a-2b)I_n)$.
Si $a=b$, on a $C_1=C_2$ donc A n'est pas inversible et si $b=(1-n)a$, on a $C_1+C_2+\cdots+C_n=0$ donc A n'est pas inversible.

Exercice 46 *[sujet]* $P=(X-1)(X-2)$ convient puis $M^n=(2^n-1)M+(2-2^n)I_3$

Exercice 47 *[sujet]* **1.** On vérifie que I_3, A et A^2 sont libres.

2. $P=X^3+1$ est annulateur de A, comme $P(0)\neq 0$, A est inversible et on trouve $A^{-1}=-A^2$.
3. Ce sont les polynômes de $P\mathbb{R}[X]$ (multiples de P) : cf cours en utilisant une division euclidienne par P.

Exercice 48 *[sujet]* $X(X-1)(2X-3)$ annule u donc $u^n=2\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right]u^2+\left[3-2\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}\right]u$ pour $n\geqslant 1$

Exercice 49 *[sujet]* On a $P=1+XQ$ donc $A(B-Q(A))=I_n$ puis A est inversible et $A^{-1}=B-Q(A)$. Comme on a aussi $A^{-1}A=I_n$, on en déduit $BA=P(A)$ aussi.

Exercice 50 *[sujet]* 0 est racine simple de P donc on peut écrire $P=XQ$ avec $Q(0)\neq 0$.

1. En dimension finie : si $x\in\ker(f)\cap\operatorname{Im}(f)$ alors $x=f(a)$; on vérifie $P(f)(a)=Q(0)f(a)$ car $f^2(a)=f(x)=0$ donc avec $P(f)=0$, on a $x=f(a)=0$. Le théorème du rang permet de conclure.

2. En dimension quelconque : la preuve de la somme directe reste la même ; si $x \in E$, on pose (à trouver par analyse/synthèse) $b = \frac{1}{Q(0)}Q(f)(x)$ et $a = x - b$ et on a $x = a + b$, $f(b) = 0$ et $b \in \mathrm{Im}(f)$ car $1 - \frac{1}{Q(0)}Q$ est un polynôme sans terme constant ; on a donc $E = \ker(f) + \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 51 *[sujet]* **1.** On a $P = \alpha X + X^2 Q(X)$ avec $\alpha \neq 0$ donc si $u^2(x) = 0$, on a $\alpha u(x) + Q(u) \circ u^2(x) = 0$ donc $u(x) = 0$ et $\ker(u^2) \subset \ker(u)$ (récip tjs vraie)

2. On vérifie alors $\ker(u) = \ker(u^k)$ pour tout $k \geqslant 1$ donc si u est nilpotent, il existe $k \geqslant 1$ tel que $u^k = 0$ puis $\ker(u) = \ker(0) = E$ donc $u = 0$.

Exercice 52 *[sujet]* **1.** $\det(f)^n = 1$

2. $(id - f) \circ (id + f + \cdots + f^{n-1}) = id - f^n = id$

3. $E = \ker(f) \oplus E_0$; le théorème du rang (cf preuve) prouve que f réalise un isomorphisme de E_0 sur $\mathrm{Im}(f)$; il suffit de prendre g un prolongement de cet isomorphisme à E

Exercice 53 *[sujet]* **1.** Il existe $p < q$ tels que $u^p(x) = u^q(x)$, comme u est bijectif, en composant par $(u^{-1})^p$, on trouve $u^{q-p}(x) = x$. Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe n_i tel que $u^{n_i}(e_i) = e_i$ et il suffit de prendre $N = \mathrm{ppcm}(n_i)$ pour avoir $u^N(e_i) = e_i$ pour tout i donc $u^N = id$ (égalité sur la base $\mathcal{B}$)

2. Non : si $u = 0$, l'ensemble est fini mais $u^N = 0$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 54 *[sujet]* **1.** Si $M + \mathrm{Tr}(AM)B = 0$, en multipliant par A à gauche puis en appliquant la trace (linéaire), on trouve $(\mathrm{Tr}(AM)(1 + \mathrm{Tr}(AB)) = 0$.

2. Si $\mathrm{Tr}(AB) \neq -1$ alors $\mathrm{Tr}(AM) = 0$ donc $M = 0$ qui est bien solution.

3. Si $\mathrm{Tr}(AB) = -1$ alors $M = -\mathrm{Tr}(AM)B \in \mathrm{Vect}\{B\}$ et si $M = \lambda B$ alors $\mathrm{Tr}(AM) = \lambda \mathrm{Tr}(AB) = -\lambda$ donc M est bien solution.

Exercice 55 *[sujet]* Si X est solution alors, en appliquant la trace, on a $2\,\mathrm{Tr}(X) = \mathrm{Tr}(X)\,\mathrm{Tr}(A)$. Si $\mathrm{Tr}(A) \neq 2$ alors $\mathrm{Tr}(X) = 0$ puis $X + {}^tX = 0$ donc X est antisymétrique ; réciproquement, toute matrice antisymétrique est solution puisqu'elle est de trace nulle.
Si $\mathrm{Tr}(A) = 2$, on transpose la ligne et on obtient ${}^tX + X = \mathrm{Tr}(X)\,{}^tA$ donc si $A \neq {}^tA$, on retrouve $\mathrm{Tr}(X) = 0$; les solutions sont encore les matrices antisymétrique.
Enfin, si $\mathrm{Tr}(A) = 2$ et $A = {}^tA$ alors on décompose X en $X = X_1 + X_2$ avec $X_1 = {}^tX_1$ et $X_2 = -{}^tX_2$, on obtient $2X_1 = \mathrm{Tr}(X_1)A$ donc $X_1 \in \mathrm{Vect}\{A\}$ et on vérifie que l'ensemble des solutions est $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{Vect}\{A\}$.

Exercice 56 *[sujet]* **1.** Si $f(M) = 0$ alors (en appliquant la trace), on a $(1 + \mathrm{Tr}(A))\,\mathrm{Tr}(M) = 0$ donc, si $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$, $\mathrm{Tr}(M) = 0$ puis en reprenant $f(M) = 0$, on trouve $M = 0$. f est un endomorphisme en dimension finie injectif, donc bijectif.

2. Si $f(M) = 0$ alors $M = -\mathrm{Tr}(M)A \in \mathrm{Vect}\{A\}$ donc $\ker(f) \subset \mathrm{Vect}\{A\}$; on vérifie $f(A) = 0$ donc $\ker(f) = \mathrm{Vect}\{A\}$. Le th du rg donne $\mathrm{rg}(f) = n^2 - 1$; on a $\mathrm{Tr}(f(M)) = 0$ donc $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(\mathrm{Tr})$ qui est aussi un hyperplan puisque Tr est une forme linéaire non nulle. On a donc $\mathrm{Im}(f) = \ker(\mathrm{Tr})$.

3. Si $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$, il existe une unique solution (f bijective) : on a $(1 + \mathrm{Tr}(A))\,\mathrm{Tr}(X) = \mathrm{Tr}(B)$ donc $X = B - \frac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}A$.
Si $\mathrm{Tr}(A) = -1$ et $\mathrm{Tr}(B) \neq 0$, $B \notin \mathrm{Im}(f)$ donc pas de solution alors que si $\mathrm{Tr}(B) = 0$, on a une infinité de solutions qui sont $B + \alpha A$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 57 *[sujet]* **1.** Facile

2. Si $M \in \Delta_A$ alors $\mathrm{Tr}(M + {}^tM) = \mathrm{Tr}(M)\,\mathrm{Tr}(A)$ donc $\mathrm{Tr}(M) = 0$ et $M + {}^tM = 0$; récip facile

3. Si $M \in \Delta_A$ alors ${}^tM + M = \mathrm{Tr}(M)\,{}^tA$ et $M + {}^tM = \mathrm{Tr}(M)A$, comme $A \neq {}^tA$, on a $\mathrm{Tr}(M) = 0$ et on termine de même avec $\Delta_A = \mathcal{S}_n$

4. Si $M \in \Delta_A \cap \mathcal{S}_n$, $2M = \mathrm{Tr}(M)A \in \mathrm{Vect}\{A\}$ puis on vérifie $\Delta_A = \mathcal{S}_n \oplus \mathrm{Vect}\{A\}$

Exercice 58 *[sujet]* Pour $X = E_{i,j}$ avec $i \neq j$, on a $\mathrm{Tr}(X) = 0$ donc $\mathrm{Tr}(AX) = 0$ et $\mathrm{Tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$; ainsi A est diagonale. Puis si $X = E_{i,i} - E_{j,j}$, de trace nulle, on a aussi $\mathrm{Tr}(AX) = 0$ ce qui donne $a_{i,i} = a_{j,j}$ donc A est scalaire.

Exercice 59 *[sujet]* f est une forme linéaire donc $f(0) = 0$. Si $i \neq j$ alors $E_{i,j}E_{j,j} = E_{i,j}$ et $E_{j,j}E_{i,j} = 0$ donc $f(E_{i,j}) = f(0) = 0$; par contre $E_{i,i} = E_{i,1}E1,i$ et $E_{1,i}E_{i,1} = E_{1,1}$, on en déduit $f(E_{i,i}) = F(E_{1,1}) = \lambda$ puis par linéarité $f(A) = \lambda\,\mathrm{Tr}(A)$.

Exercice 60 *[sujet]* Linéarité de ce genre d'application, cf cours. La matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 61 *[sujet]* Linéarité facile. $f(X^k)(x) = \left[\dfrac{t^{k+1}}{k+1}\right]_x^{x+1} = \dfrac{1}{k+1}[(x+1)^{k+1} - x^k] = \dfrac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}X^i \in \mathbb{R}_n[X]$ donc f est un endomorphisme dont la matrice dans la bas canonique est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale et $\mathrm{Tr}(f) = n+1$.

Exercice 62 *[sujet]*

1. Si $P \in \ker(Q)$ alors $Q(X+1) = Q(X)$ (polynôme 1-périodique) donc Q est constant, $P(X+1) - P(X) = k$ donne $\deg(P) \leqslant 1$ car pour un polynôme de degré $\geqslant 2$, $\lim\limits_{+\infty} |P(x+1) - P(x)| = +\infty$. On trouve $\ker(\phi) = \mathbb{R}_1[X]$.
2. Comme $\deg \phi(P) \leqslant \deg(P) - 1$, on a $\phi^{n+1} = 0$.
3. On a $Q = \phi(P_1)$ par définition de $\mathrm{Im}(\phi)$, il suffit de prendre $P = P_1 - P_1(0) - P_1'(0)X$.

Exercice 63 *[sujet]* Pour simplifier, on va numéroter les coefficients de M entre 0 et n : $\phi(X^k) = (X+1)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}X^i$ donc $m_{i,j} = \begin{cases} \binom{j}{i} & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. M^{-1} est la matrice de ϕ^{-1} et $\phi^{-1}(P) = P(X-1)$; on a donc $M^{-1} = (n_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $n_{i,j} = \begin{cases} \binom{j}{i}(-1)^{j-i} & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 64 *[sujet]*

1. Par $L_k \leftarrow L_k - \alpha L_{k+1}$ le déterminant devient triangulaire inférieur donc $D_1 = (1-\alpha^2)^{n-1}$.
2. Après $C_k \leftarrow C_k - C_1$ les colonnes, à partir de la deuxième sont proportionnelles donc $D_2 = 0$ si $n \geqslant 3$; $D_2 = x$ pour $n = 1$ et $D_2 = -2$ pour $n = 2$.
3. On fait successivement $L_k \leftarrow L_k - L_{k+1}$ puis $C_k \leftarrow C_k + C_n$ puis on développe par la première colonne ; on trouve $D_3 = (-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}$.

Exercice 65 *[sujet]* Par développement suivant C_1 puis L_1, on trouve $D_{n+2} = (1+x^2)D_{n-1} - x^2 D_n$ (récurrence linéaire à deux termes) ; si $x^2 \neq 1$, on trouve $D_n = \dfrac{x^{2n+2}-1}{x^2-1}$ et si $x^2 = 1$, $D_2 = n+1$.

Exercice 66 *[sujet]*

1. En factorisant les colonnes de AM, on trouve $\det(AM) = (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)\det(M)$ donc comme $\det(AM) = \det(A)\det(M)$ et $\det(M) \neq 0$ (Vandermonde), on trouve $\det(A) = (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)$
2. On fait de même avec $M = (\omega^{kl})_{0 \leqslant k,l \leqslant n-1}$ où $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$ et on trouve $\det(A) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{h=0}^{n-1} a_h\omega^{hk}\right)$.

Exercice 67 *[sujet]*

1. Par $L_k \leftarrow L_k - L_1$ puis développement par la première ligne (il n'y a plus de x en dehors de la première ligne) $D(x) = \det(M + xJ) = \alpha x + \beta$ est affine.
2. Pour $D(-b) = f(b) = \alpha b + \beta$ si $f(t) = \prod_{i=1}^{n}(r_i - t)$ (triangulaire inférieure) et $D(-a) = f(a) = \alpha a + \beta$; si $a \neq b$, on trouve $D(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{a-b}x + \dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$ et $\det(M) = D(0) = \dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$.
3. $\det(M_\varepsilon) = \dfrac{af(a+\varepsilon) - (a+\varepsilon)f(a)}{-\varepsilon} = f(a) - a\dfrac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f(a) - af'(a)$ et par continuité du déterminant (il ne se calcule par rapport aux coefficients qu'avec des produits et des combinaisons linéaires) on en déduit $\det(M) = f(a) - af'(a)$ si $a = b$.

Exercice 68 *[sujet]* Avec $M = \begin{pmatrix} I_p & -B \\ -A & I_q \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} I_p & B \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$, comme M et N sont carrées, on a $\det(MN) = \det(M)\det(N) = \det(NM)$, ce qui fournit le résultat avec $\det(MN) = \det(I_q - AB)$ et $\det(NM) = \det(I_p - BA)$ car triangulaires par blocs.

Exercice 69 *[sujet]*

1. Si $C \neq 0$, on écrit $C = PJ_rQ^{-1}$ avec $r \geqslant 1$ et on choisit $X = PI_nQ^{-1}$; on a $\det(X) = \det(P)\det(Q)^{-1}$ et $\det(C+X) = \det(P)2^r\det(Q)^{-1}$ ce qui est absurde.
2. idem avec $A - B$.

Exercice 70 *[sujet]*

1. Si M est complexe et $\overline{M}$ la matrice obtenue en conjuguant tous les coefficients de M, on a $\det(\overline{M}) = \overline{\det(M)}$ (le déterminant ne se calcule qu'avec des combinaisons linéaires et des produits de ses coefficients). Comme $A^2+B^2 = (A+iB)(A-iB)$ et que A et B sont réelles, on trouve $\det(A^2+B^2) = |\det(A+iB)| \geqslant 0$

2. idem car si A et B commutent alors A^k et B^k aussi.

3. On a (avec la factorisation de $X^{2k+1}+1$), $A^{2k+1}+B^{2k+1}=(A+B)\prod_{j=0}^{k-1}\left(A^j-e^{i\frac{(2j+1)\pi}{k}}B^j\right)\left(A^j-e^{-i\frac{(2j+1)\pi}{k}}B^j\right)$

donc $\det(A^{2k+1}+B^{2k+1})=\det(A+B)\prod_{j=0}^{k-1}\left|\left(A^j-e^{i\frac{(2j+1)\pi}{k}}B^j\right)\right|^2\geqslant 0$

Exercice 71 *[sujet]* **1.** Si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i=0$ alors $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x_j)=0$ pour tout $j\in[\![1,n]\!]$ donc $\alpha_i=0$ car la matrice $(f_i(x_j))$ est inversible.

2. $f_n\neq 0$ donc il existe x_n tel que $f_n(x_n)\neq 0$; par $L_i\leftarrow L_i-\dfrac{f_i(x_n)}{f_n(x_n)}$ puis dvt par C_n, on trouve $\det(f_i(x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}=f_n(x_n)\det(g_i(x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}$ avec $g_i=f_i-\dfrac{f_i(x_n)}{f_n(x_n)}$. On vérifie que les g_i sont libres : si $\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i g_i=0$ alors $\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i f_i-\dfrac{1}{f_n(x_n)}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i f_i(x_n)\right)f_n$ donc $\alpha_i=0$ par liberté des f_i ; on applique alors l'HR aux g_i pour déterminer $x_1,\dots,x_{n-1}$.

Exercice 72 *[sujet]* **1.** degrés étagés

2. $Q^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}a_iP_k(b_i)X^{b_i-k}$ donc $\sum_{i=1}^{n}a_iP_k(b_i)=Q^{(k)}(1)=\begin{cases}0 & \text{si } k\leqslant n-1\\ n!P(1) & \text{si } k=n \text{ (Leibniz)}\end{cases}$

3. $(S_n)_j=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i^{j-1}$ or $X^{j-1}\in\mathrm{Vect}\{P_0,\dots,P_{j-1}\}$ donc, avec 2), $(S_n)_j=0$ pour $j\leqslant n$. De plus $X^n=P_n+R$ avec $R\in\mathrm{Vect}\{P_0,\dots,P_{n-1}\}$ donc $(S_n)_{n+1}=n!P(1)$ donc $S_n=n!P(1)E_{n+1}$ (dernier vecteur de $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^{n+1}$)

4. $|S_n,B_1,\dots,B_n|=0$ car $S_n\in\mathrm{Vect}\{B_1,\dots,B_n\}$ et $|S_n,B_1,\dots,B_n|=\begin{vmatrix}0 & V(b_1,\dots,b_n)\\ n!P(1) & b_1^n\ \dots\ b_n^n\end{vmatrix}=(-1)^n n!P(1)V(b_1,\dots,b_n)$.
Comme les b_i sont deux à deux distincts, on en déduit $P(1)=0$.