Correction TD5 : Intégration

Exercice 1 (CCP PSI 2007)

1. Montrer que u défini par $u(f)(x) = \int_0^x \cos(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   indication : pour montrer que $u(f)$ est continue, utiliser la linéarité de l'intégrale.
2. Calculer $u(f)(0)$.
3. Trouver les fonctions f telles que $u(f)$ soit constant.
   indication : vérifier que $u(f)$ est dérivable.
4. Résoudre $u(f) = \lambda f$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
   indication : vérifier que si $\lambda \neq 0$ alors une solution f est forcément dérivable.

---

1. Par linéarité de l'intégrale, on a, pour $x \in \mathbb{R}$, $u(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha u(f)(x) + \beta u(g)(x)$ ce qui donne la linéarité de u.
   On a $u(f)(x) = \cos(x)\int_0^x \cos(t)f(t)\,\mathrm{d}t + \sin(x)\int_0^x \sin(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ et comme $f\sin$ et $f\cos$ sont continues sur $\mathbb{R}$ les fonctions $F_1 : x \mapsto \int_0^x \cos(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ et $F_2 : x \mapsto \int_0^x \sin(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par produit et combinaison linéaires de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $u(f) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ donc $\boxed{u \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}))}$
2. $u(f)(0) = 0$
3. On commence par remarquer que si $u(f) = \lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda = u(f)(0) = 0$ donc la seule valeur de λ à considérer est $\lambda = 0$, ce qui revient à étudier $\ker(u)$.
   Si $u(f) = 0$ alors, en dérivant et avec les notations précédentes, $-\sin F_1 + \cos^2 f + \cos F_2 + \sin^2 f = 0$ puis $f = \sin F_1 - \cos F_2$. Les fonctions F_1 et F_2 étant $\mathcal{C}^1$, f est donc nécessairement $\mathcal{C}^1$ aussi. On en déduit $f' = \cos F_1 + \sin\cos f + \sin F_2 - \cos\sin f = \cos F_1 + \sin F_2 = u(f) = 0$ donc f est une fonction constante. On vérifie réciproquement que la seule fonction constante qui vérifie $u(f) = 0$ est la fonction nulle. On a donc $\boxed{\ker(u) = \{0\}}$ et u est injectif.
4. Pour la question qui suit, on va devoir prouver des équivalences ; pour éviter d'avoir à examiner les réciproques (parfois longues), on va chercher à conserver des équivalences au cours de la démonstration en utilisant, lorsque f et g sont deux fonction $\mathcal{C}^1$, $f = g \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f' = g' \\ f(0) = g(0) \end{array}\right.$.
   Si $u(f) = \lambda f$ et $\lambda \neq 0$ alors $f = \dfrac{1}{\lambda}u(f)$ est donc $\mathcal{C}^1$ puisque $u(f)$ l'est (et le cas $\lambda = 0$ a déjà été fait avant)
   On a donc $u(f) = \lambda f \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u(f)' = \lambda f' \\ u(f)(0) = f(0) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\sin F_1 + \cos F_2 + f = \lambda f' \\ 0 = f(0) \end{array}\right.$ Les fonction F_1, F_2 et f étant $\mathcal{C}^1$, on en déduit que f' est elle aussi $\mathcal{C}^1$ (car $\lambda \neq 0$ comme pour f au début de cette question) ; on peut donc dériver une seconde fois : $u(f) = \lambda f \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\cos F_1 - \sin\cos f - \sin F_2 + \cos\sin f + f' = \lambda f'' \\ f(0) = 0 \\ \lambda f'(0) = f(0) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -u(f) + f' = \lambda f'' \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{array}\right.$
   Ainsi f est solution de l'équation différentielle $\lambda f'' - f' + \lambda f = 0$ avec les conditions $f(0) = f'(0) = 0$ dont la seule solution est $\boxed{f = 0}$

Exercice 5 (Mines-Ponts PSI 2022)

Soit $f(x) = \int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et préciser f'.
2. Déterminer des équivalents de f en 0 et $+\infty$.
   indication : pour l'équivalent en $+\infty$, qui est $\dfrac{e^{-x}}{x}$, commencer par une IPP.
3. Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et calculer cette intégrale.

---

1. Si $x \in \mathbb{R}^{+*}$ alors $g : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x,+\infty[$ et $g(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc g est intégrable sur $[x,+\infty[$ et $f(x)$ existe.
   On a ensuite $f(x) = \int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t = f(1) - \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t$ donc, comme g est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f(1)$ est une constante, $\boxed{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*} \text{ et } f'(x) = -g(x)}$

2. a) En 0 : on remarque que $g(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$ mais $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $[x, +\infty[$ donc on va couper l'intégrale définissant f et examiner $f(x) - \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,\mathrm{d}t + f(1)$. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}-1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 (elle tend vers -1 en 0) donc est intégrable sur $]0, 1]$, ce qui donne $\lim_{x \to 0} f(x) - \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,\mathrm{d}t + f(1) = \ell$ est finie. On réécrit cette limite sous la forme $f(x) \underset{0}{=} \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} + \ell + o(1) = -\ln(x) + \ell + o(1)$ et comme $\lim_0 -\ln(x) = +\infty$, on en déduit $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)}$

b) En $+\infty$, on ne peut pas adopter la même idée car g ne possède pas d'équivalent « simple » en $+\infty$. On commence donc par une IPP avec $u(t) = frac1t$ et $v(t) = e^{-t}$ qui sont $\mathcal{C}^1$ sur $[x, +\infty[$ et qui vérifient $\lim_{+\infty} uv = 0$, $\lim_x uv = u(x)v(x)$. On a donc $f(x) = \left[\frac{-e^{-t}}{t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Pour conclure $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$, il faut prouver $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$, ce que l'on va faire par majoration :
$\left|\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x}}{x^2}$. On a donc $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{e^{-x}}{x^2}\right)$ qui est mieux que le résultat nécessaire. On en déduit donc $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}}$

3. On a prouvé que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et intégrable grâce aux équivalents de la question précédente car $\frac{e^{-x}}{x} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par exemple.

On calcule alors cette intégrale par IPP : $u : t \mapsto f(t)$ et $v : t \mapsto t$ sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $u(t)v(t) \underset{0}{\sim} -t\ln(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ et $u(t)v(t) \underset{+\infty}{\sim} e^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$. On a donc

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[tf(t)\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} tf'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} tg(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

ce qui donne $\boxed{\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1}$