Correction TD7 : Algèbre linéaire

Exercice 5 **(Mines-Ponts PSI 2022)**

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer M^n pour $n \geqslant 1$.
indiction : écrire $M = I_3 + N$ et vérifier N nilpotente

2. Déterminer une base de $F = \text{Vect}\{M^n, n \geqslant 1\}$.

3. Montrer que le commutant de M est exactement F.

---

1. On pourrait calculer M^n à partir d'un polynôme annulateur de M, en commençant par vérifier que $(M - I_3)^3 = 0$ (donc 1 est racine triple de $(X-1)^3$) mais on peut suivre l'idée de l'indication : si on pose $N = M - I_3$, on a $N^3 = 0$ donc N est nilpotente. On utilise alors la formule du binôme puisque N et I_3 commutent ; pour $n \geqslant 3$

$$M^n = (I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2$$

puisque $N^k = 0$ pour $k \geqslant 3$.

2. Une des difficultés vient du fait que $n \geqslant 1$ dans la description de F donc, à priori, $F \neq \mathbb{R}[M]$ car $I_3 \notin F$. En fait ça ne change rien car $(M - I_3)^3 = 0$ donc $I_3 = M^3 - 3M^2 + 3M$ donc on a bien $I_3 \in F$ et $F = \mathbb{R}[M]$. En effectuant la division euclidienne de X^n par $(X-1)^3$, on a $X^n = (X-1)^3 Q + aX^2 + bX + c$ donc $M^n = (M - I_3)^3 Q(M) + aM^2 + bM + cI_3 = aM^2 + bM + cI_3 \in \text{Vect}\{I_3, M, M^2\}$. On a donc $F \subset \text{Vect}\{I_3, M, M^2\}$ et on a déjà justifié la réciproque donc $F = \text{Vect}\{I_3, M, M^2\}$. Reste à vérifier que (I_3, M, M^2) est libre (facile), ce qui signifie qu'il n'existe pas de polynôme annulateur de M de degré $\leqslant 2$, et on en déduit que $\boxed{(I_3, M, M^2) \text{ est une base de } F}$

On pouvait aussi trouver une autre base, grâce à la première question puisqu'on a prouvé que $F \subset \text{Vect}\{I_3, N, N^2\}$. Il reste à vérifier que I_3, N, N^2 sont libres mais surtout appartiennent à F : I_3 a été fait, $N = M - I_3$ est bien dans F et $N^2 = M^2 - I_3 - 2N$ est aussi dans F.

3. On cherche $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telle que $MA = AM \Leftrightarrow \begin{cases} d = g = h = 0 \\ a = e = i \\ b = f \end{cases}$, après résolution du système. On en déduit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aI_3 + bN + \dfrac{c-b}{2} N^2 \in F$ puisqu'on a prouvé que I_3, N et N^2 sont dans F. On a donc $\mathcal{C}(M) \subset F$ et la réciproque est évidente.

Exercice 6 **(Mines-Télécom PSI 2019)**

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$. On suppose $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$

1. Montrer que $E = \ker(u) \oplus \text{Im}(v)$

2. Montrer que si E et F sont de dimension finies alors $\text{rg}(u) = \text{rg}(v)$

---

1. Comme on n'est pas en dimension finie pour cette question, on raisonne par analyse et synthèse :

— Soit $x \in E$, on suppose $x = a + b$ avec $u(a) = 0$ et $b = v(c)$; on a donc $u(x) = u(a) + u(b) = 0 + u(v(c))$ puis $v(u(x)) = v \circ u \circ v(c) = v(c) = b$. On a donc $\begin{cases} b = v \circ u(x) \\ a = x - v \circ u(x) \end{cases}$ La décomposition est unique si elle existe donc la somme est directe.

— Pour $x \in E$, on pose $\begin{cases} b = v \circ u(x) \\ a = x - v \circ u(x) \end{cases}$ et on vérifie

- $x = a + b$
- $u(a) = u(x) - u \circ v \circ u(x) = 0$ donc $a \in \ker(u)$
- $b = v(u(x)) \in \text{Im}(v)$

donc la décomposition existe et on conclut $\boxed{E = \ker(u) \oplus \text{Im}(v)}$

2. On peut utiliser la première question : $\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \text{rg}(v)$ et avec le théorème du rang appliqué à u, on a $\dim(\ker(u)) = \dim(E) - \text{rg}(u)$, ce qui donne le résultat.

On pouvait aussi le faire directement avec les propriétés du rang et de la composition : $\text{rg}(u) = \text{rg}(u \circ v \circ u) \leqslant \min\{\text{rg}(u), \text{rg}(v), \text{rg}(u)\} \leqslant \text{rg}(v)$ et $\text{rg}(v) = \text{rg}(v \circ u \circ v) \leqslant \min\{\text{rg}(v), \text{rg}(u), \text{rg}(v)\} \leqslant \text{rg}(u)$ donc $\text{rg}(u) = \text{rg}(v)$ par double inégalité.