TD9 : Suites et séries de fonctions

Exercice 1 **(CCINP PSI 2019)**

On pose $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$ si $x \geqslant 0$ et $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx^2}$ si $x < 0$.

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f à déterminer.

2. Montrer que (f_n') converge simplement sur $\mathbb{R}$ mais ne converge pas uniformément sur $[-1,1]$.

Exercice 2 **(CCP PSI 2016)**

Soit $f_n(x) = x^n \dfrac{e^{-x}}{n!}$ pour $x \geqslant 0$.

1. Montrer la convergence simple puis uniforme de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}^+$.

2. Étudier la série $\sum f_n$.

Exercice 3 **(Mines-Ponts PSI 2019)**

1. Convergence simple puis uniforme sur $[0,1]$ de la suite $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$

2. Convergence simple puis uniforme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

indication : commencer la CVN ; lorsqu'il n'y a pas CVN, montrer qu'il n'y a pas CVU en commençant par calculer le reste dans le cas limite.

Exercice 4 **(CCINP PSI 2022)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et g_n définie sur $[0,1]$ par $g_n(t) = e^t\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$.

1. Montrer que pour tout réel $t \in [0,1]$, $|g_n'(t)| \leqslant \dfrac{e^t}{n}$ puis que $\left|1 - e^t\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n\right| \leqslant \dfrac{te^t}{n}$.

2. Étudier la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.

indication : on peut prouver directement la CVU (sans faire la CVS avant) si on pense connaître la limite à trouver.

Exercice 5 **(CCINP PSI 2021)**

Soit $f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x}{n^{x+1}}$

1. Déterminer le domaine de définition D de f.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

3. Étudier la continuité de f en 0.

4. Déterminer la limite de $f(x) - x$ en $+\infty$.

Exercice 6 **(Centrale PSI 2022)**

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \,]-1,1[\,,\ u_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^n}{1-x^n}$. On pose : $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $]-1,1[$.

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1[$, $v_n(x) = (1-x)u_n(x)$. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n(x)$ converge uniformément sur $[0,1]$ et en déduire un équivalent de f en 1^-.

Exercice 7 **(CCINP PSI 2021)**

On pose, pour $n \geqslant 2$ et $x > 0$, $u_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$.

1. Déterminer le domaine de convergence de $\sum u_n(x)$.

2. Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur ce domaine.

3. On pose $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$; montrer que $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ puis montrer que la somme de la série $\sum u_n$ est continue sur son domaine de convergence.