

I Étude de suites de fonctions

Exercice 1 [Solution]

Étudier la convergence simple, uniforme, uniforme sur tout segment des suites de fonctions :

1. $f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$, $n \geq 1$, sur $\mathbb{R}$.
2. $f_n(x) = \frac{n^a \sin\left(\frac{x}{n}\right) - 1}{n^a \sin\left(\frac{x}{n}\right) + 1}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 (CCP MP 2012) [Solution]

On pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + n^2 x^2}$. Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. Étudier la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$, puis sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 3 (Mines-Ponts PSI 2012) [Solution]

On pose $f_n(x) = \begin{cases} \frac{2n^2 x^2 - nx - 1}{2n^2 x + 1} \sin^2 \frac{\pi}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \end{cases}$ Étudier les convergences simple et uniforme de (f_n) sur $[0, 1]$.

Exercice 4 (CCP PSI 2016) [Solution]

Soit $f_n(x) = \cos\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)x\right]$.

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) .
2. Y a-t-il convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5 (CCINP PSI 2021) [Solution]

On pose $f_n(x) = \frac{nx^2}{1 + nx}$ si $x \geq 0$ et $f_n(x) = \frac{nx^3}{1 + nx^2}$ si $x < 0$.

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f à déterminer.
2. Montrer que (f'_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ mais ne converge pas uniformément sur $[-1, 1]$.

Exercice 6 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et g_n définie sur $[0, 1]$ par $g_n(t) = e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$.

1. Montrer que pour tout réel $t \in [0, 1]$, $|g'_n(t)| \leq \frac{e^t}{n}$ puis que $\left|1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right| \leq \frac{te^t}{n}$.
2. Étudier la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions $I_n(x) = \int_0^x e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$.

Exercice 7 (Mines-Ponts PSI 2014) [Solution]

Pour $t \in [0, 1]$, on pose $f_0(t) = 0$ et $f_{n+1}(t) = f_n(t) + \frac{1}{2}(t - f_n(t)^2)$. Étudier les convergences simples et uniformes de (f_n) sur $[0, 1]$.

Exercice 8 (Centrale PSI 2022) [Solution]

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$. On pose $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, et $S_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (k - nx)^r$, pour $x \in [0, 1]$.

1. Citer la formule de Taylor avec reste intégral
2. Montrer que $S_{n,0}(x) = 1$ et $S_{n,1}(x) = 0$
On admet $S_{n,2}(x) = nx(1-x)$
3. Montrer qu'il existe $M \geq 0$ tel que $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{Mx(1-x)}{2n}$ pour $x \in [0, 1]$.
En déduire que $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0, 1]$

II Modes de convergence des séries de fonctions

Exercice 9 [Solution]

Étudier la convergence simple puis la convergence normale des séries de terme général

1. $u_n(x) = x^a(1-x)^{nb}n^c$ sur $[0, 1]$ où $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^{+*})^3$.
2. $u_n(x) = nx^\alpha e^{-nx^2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 10 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

1. Convergence simple puis uniforme sur $[0, 1]$ de la suite $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$
2. Convergence simple puis uniforme de la série $\sum_{n \geq 1} f_n$.

Exercice 11 (CCINP PSI 2019) [Solution]

1. Trouver les x tels que la suite (f_n) , $f_n(x) = xe^{-\sqrt{n|x|}}$ converge ; calculer $\|f_n\|_\infty$, que peut-on en déduire ?
2. Déterminer le domaine de convergence D de $\sum f_n$. La convergence est-elle absolue sur D ? Normale ? Que dire de la convergence sur $\mathbb{R} \setminus]-a, a[$, avec $a > 0$?

Exercice 12 (IMT PSI 2019) [Solution]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n(x) = \sin(x) \cos^n(x)$ et $f_n(x) = xg_n(x)$ avec $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

1. Étudier les variations de g_n .
2. Étudier la suite (f_n) puis la série $\sum_{n \geq 0} f_n$.

Exercice 13 (Mines-Ponts MP 2010) [Solution]

1. Si $\alpha > 0$, on pose $u_n(x) = \sin^\alpha x \cos^n x$; montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer sa somme.
2. À quelle condition sur α y a-t-il convergence normale ? uniforme ?

Exercice 14 (CCP PSI 2016) [Solution]

Soit $f_n(x) = x^n \frac{e^{-x}}{n!}$ pour $x \geq 0$.

1. Montrer la convergence simple puis uniforme de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}^+$.
2. Étudier la série $\sum f_n$.

Exercice 15 (CCINP PSI 2019) [Solution]

1. Montrer que, pour $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $|\ln(1+t) - t| \leq 2t^2$
2. Étudier la convergence simple et uniforme de $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 [Solution]

on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^{\ln n}}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.
2. Étudier la convergence normale de $\sum f_n$.
3. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[a, +\infty[\cap]1, +\infty[$. Qu'en déduire pour la somme f de cette série ?
4. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left|f_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right|$. Que dire de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $]1, +\infty[$?
indication : que dire de $\|f_n\|_\infty$ si $\sum f_n$ converge uniformément ?

III Continuité, limites, équivalents de sommes de séries

Exercice 17 (Mines-Télécom PSI 2018) [Solution]

1. Montrer que pour $x \in I =]-1, +\infty[$, $S(x) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$ existe.
2. Montrer que S est continue sur I .
3. Montrer que $S(x+1) - S(x) = \frac{1}{x+1}$ et en déduire un équivalent de S et -1^+ .
4. La série converge-t-elle normalement sur I ?

Exercice 18 (CCINP PSI 2021) [Solution]

Soit $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x}{n^{x+1}}$

1. Déterminer le domaine de définition D de f .
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Étudier la continuité de f en 0.
4. Déterminer la limite de $f(x) - x$ en $+\infty$.

Exercice 19 (CCINP PSI 2021) [Solution]

On pose, pour $n \geq 2$ et $x > 0$, $u_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$.

1. Déterminer le domaine de convergence de $\sum u_n(x)$.
2. Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur ce domaine.
3. On pose $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$; montrer que $|R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$ puis montrer que la somme de la série $\sum u_n$ est continue sur son domaine de convergence.

Exercice 20 (Mines-Ponts PSI 2017) [Solution]

1. Étudier les convergences simple et uniforme de $\sum_{n \geq 0} \frac{e^{-nx}}{1+n}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
indication : utiliser $R_n(1/n)$.
2. On note f la somme de la série précédente; est-elle continue? dérivable?
3. Donner ses limites en 0 et $+\infty$.

Exercice 21 (Centrale PSI 2014) [Solution]

1. Existence et continuité sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $f(x) = \sum_{n \geq 1} x^{2-\alpha} e^{-nx}$ pour $\alpha \in [0, 2[$.
2. Trouver une CNS pour que la série converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.
3. Si $\alpha = 1$, y a-t-il convergence uniforme?

Exercice 22 [Solution]

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_k : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $u_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [1, k] \\ \left(1 - \frac{k}{t}\right)^t & \text{si } t > k \end{cases}$

1. Montrer que $\sum u_k$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.
2. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$. (*indication : commencer poser $p = n - k$*)

Exercice 23 [Solution]

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2e^{-x}$.
3. Mêmes questions pour $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\operatorname{sh}^2(nx)}$.

Exercice 24 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Pour $x \neq 0$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ lorsque la série converge.

1. Déterminer le domaine de définition D de f .
2. Montrer que f est continue sur D
3. Étudier les variations de f
4. Montrer que, si $x > 0$, $f_n(x) \leq \frac{e^{-(n-1)x}}{\operatorname{sh} x}$ et en déduire $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\operatorname{sh} x}$

Exercice 25 (CCP PSI 2013) [Solution]

1. Ensemble de définition de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{x+n}$, en fonction de a ?
2. On suppose $|a| < 1$ jusqu'à la fin de l'exercice, montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Déterminer une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$ et en déduire un équivalent de S en 0.
4. Montrer que $xS(x)$ tend vers $\frac{1}{1-a}$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 26 (CCP PSI 2018) [Solution]

On note $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ et $f(x) = \sum_{n \geq 1} f_n(x)$.

1. Donner l'ensemble de définition D de f .
2. Pour $a > 0$, montrer la convergence normale sur $[a, +\infty[$ puis étudier la convergence normale sur D .
3. f est-elle continue sur D ? Déterminer sa limite en $+\infty$.
4. Montrer que $\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq e^{-x\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^n e^{-x\sqrt{t}} dt$ et en déduire que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{x^2}$.

Exercice 27 (Mines-Ponts PSI 2022) [Solution]

On donne $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x^2}$.

1. Domaine de définition et continuité de f .
2. Donner la limite de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.
3. Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Exercice 28 (ENSAM PSI 2018) [Solution]

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et étudier ses variations.
3. Calculer $f(x) + f(x+1)$ et en déduire des équivalents de f en 0^+ et $+\infty$.
indication : pour l'équivalent en $+\infty$, encadrer $f(x)$ avec la valeur de $f(x) + f(x+1)$ et la monotonie de f .

Exercice 29 (ENSAM PSI 2018) [Solution]

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ lorsque la série converge.

1. Montrer que f est définie, continue et $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$.
2. Pour $x \in [0, 1[$, on pose $\varphi_x(t) = \frac{x^t}{1-x^t}$. Montrer que $\int_a^b \varphi_x(t) dt = \frac{\ln(1-x^a) - \ln(1-x^b)}{\ln x}$.
En déduire la limite et un équivalent de f en 1^- .

Exercice 30 (Centrale PSI 2022) [Solution]

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1, 1[, u_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{1-x^n}$. On pose : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$.
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1[, v_n(x) = (1-x)u_n(x)$. Montrer que $\sum_{n \geq 1} v_n(x)$ converge uniformément sur $[0, 1]$ et en déduire un équivalent de f en 1^- .

Exercice 31 (Centrale PSI 2019) [Solution]

1. Énoncer le théorème d'intégration par parties sur un intervalle $[a, b]$, $a < b$
2. Trouver une primitive de $t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$
3. a) Trouver le domaine de définition et la valeur de $I(x) = \int_1^{+\infty} x^{\sqrt{t}} dt$
 b) Trouver le domaine de définition et un équivalent en 1 de $S(x) = \sum_{n \geq 1} x^{\sqrt{n}}$

Exercice 32 (Mines-Ponts PSI 2017) [Solution]

On note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $u_n(t) = \frac{t^n \ln(t)}{H_n}$ et $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$

1. Déterminer le domaine de définition de S et montrer que la série converge normalement sur tout $]0, a] \subset]0, 1[$.
 En est-il de même sur $]0, 1[$?
2. Montrer que S est continue sur $]0, 1[$. Est-elle dérivable sur ce même intervalle ?
indication : montrer que $|R_n(t)| \leq \frac{-t \ln(t)}{(1-t)H_{n+1}}$ puis montrer qu'elle n'est pas dérivable en 1 (avec le taux d'accroissement) en utilisant $-\ln(1-t) = \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n}$ si $|t| < 1$.

Exercice 33 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

On pose $f(x) = \sum_{n \geq 1} \ln(1 + e^{-nx})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f .
2. Montrer que f est continue et strictement décroissante sur D .
3. Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$ et la déterminer.
4. Déterminer un équivalent de f en 0^+ ; on donne $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

indication : trouver l'équivalent en 0 en fonction d'une intégrale, poser $y = e^{-xt}$, qui se calculera en utilisant la somme donnée et $\ln(1+t) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n}$ si $t \in [0, 1]$.

Exercice 34 (Centrale PSI 2019) [Solution]

Pour $x \in [1, +\infty[$, on pose $u_0(x) = x$ et $u_{n+1}(x) = u_n(x) + \frac{1}{u_n(x)}$

1. Montrer que $(u_n(x))$ est bien définie. La suite $(u_n(x))$ admet-elle une limite ?
2. On pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{u_n(x)}$; montrer que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $[1, +\infty[$.
3. Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $[1, +\infty[$ mais que $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[1, +\infty[$.

Exercice 35 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Soient $I = [-a, a]$ et φ continue sur I pour laquelle il existe $c > 0$ tel que $\forall x \in I, |\varphi(x)| \leq C|x|$. On cherche les fonctions

f , définies sur I , continues en 0 et telles que $\begin{cases} f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x) & \text{pour } x \in I \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n \geq 0} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est définie et continue sur I .
2. Montrer que S est solution du problème posé
3. Montrer que la différence de 2 solutions du problème est nulle ; que peut-on en déduire sur l'ensemble des solutions ?
4. On suppose φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , montrer que f est aussi $\mathcal{C}^1$ sur I .

Exercice 36 (Centrale PC 2015) [Solution]

Trouver les fonctions f , continues en 0 telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) - f(x) = \ln(1+x^2)$.

indication : justifier que $f(x) - f(0) = \sum_{n \geq 0} (f(2^{-n}x) - f(2^{-(n+1)}x))$ lorsque f est continue en 0.

IV Dérivabilité des séries de fonctions

Exercice 37 (CCINP PSI 2018) [Solution]

1. Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
3. Calculer $f(1)$ et trouver un équivalent de $f(p)$, $p \in \mathbb{N}^*$, lorsque p tend vers $+\infty$.

Exercice 38 (IMT PSI 2019) [Solution]

1. Donner le domaine de définition de $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.
2. Étudier la continuité puis le caractère $\mathcal{C}^1$ de f .

Exercice 39 (CCINP PSI 2022) [Solution]

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3 + x^2}$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 40 (CCINP PSI 2022) [Solution]

$$\text{Soient } f(x) = \frac{x}{\operatorname{sh} x} \text{ et } f_n(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 nx}$$

1. f est-elle prolongeable par continuité en 0. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^*$; on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
3. Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
4. Exprimer f_n à l'aide de f et en déduire un équivalent simple de S en 0
5. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 41 (Mines-Télécom PSI 2021) [Solution]

$$\text{Soit } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n [\sqrt{n+x} - \sqrt{n}] \text{ pour } x \geq 0.$$

1. Montrer que f est bien définie
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$; étudier ses variations.
3. Montrer que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

indication : raisonner par l'absurde et commencer par vérifier que $f(x) \geq S_{2n+1}(x)$ avant de séparer les termes pairs/impairs.

Exercice 42 (CCINP PSI 2022) [Solution]

$$\text{Soient } u_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^2 \ln(1+n)} \text{ et } S(x) = \sum_{n \geq 1} u_n(x).$$

1. Trouver le domaine de définition D de S .
2. Montrer que S est continue sur D .
3. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que $\sum u'_n(x)$ converge uniformément sur D .
4. Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur D .

Exercice 43 (Mines-Télécom PSI 2021) [Solution]

1. Déterminer le domaine de convergence de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ avec $u_n(x) = \frac{1}{n^2x + n}$.
2. Montrer que sa somme S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que, pour $x > 0$, on a $\left| S(x) - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2x} \right| \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3x^2}$ et en déduire un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 44 [Solution]

On note $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. f est-elle continue sur son ensemble de définition ?
3. Déterminer $\lim_{+\infty} f$.
4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
5. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 45 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

1. Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
3. f est-elle dérivable en 0 ? Continue en 0 ?

Exercice 46 (CCINP PSI 2021) [Solution]

Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$ et $S(x) = \sum_{n \geq 1} u_n(x)$

1. Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge pour $x \geq 0$.
2. S est-elle continue sur $\mathbb{R}^+$?
3. Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. Calculer $S(x)$ pour $x \geq 0$.

Exercice 47 (CCP PSI 2012) [Solution]

1. Montrer que le domaine de définition de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$ est $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Calculer $f''(x)$ puis $f'(x)$ pour $x > 0$.
4. Montrer que f est non dérivable en 0.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $f(x) = f(0) + \int_0^x \ln(1 - e^{-t}) dt$

Exercice 48 (Mines-Ponts PSI 2013) [Solution]

1. Donner le domaine de de définition D de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + x^n)$
2. Montrer que f est continue et dérivable sur D .
En déduire un équivalent de f en 0.
3. Montrer que, pour $x \in [0, 1[$, $\phi : t \mapsto \ln(1 + x^t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et en déduire un équivalent de f en 1.

Exercice 49 (Centrale PSI 2014) [Solution]

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n + n^2 x}$.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln x$ et déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 50 (Mines-Ponts PSI 2016) [Solution]

Soit $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x}{n(1 + nx^2)}$

1. Déterminer le domaine de définition de f ; étudier sa continuité et sa dérivabilité.
2. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 51 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

Pour $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ et $\eta(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$

1. Montrer que ζ et η sont définies sur $]1, +\infty[$.

2. Montrer que $\eta(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$ pour $x > 1$.

3. Montrer que $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$.

4. Montrer que $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \frac{1}{x-1} + \gamma + o(x-1)$ où $\gamma = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\eta'(1)}{\ln 2}$.

indication : montrer que η est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+}$ puis utiliser Taylor-Young et vérifier que $\eta(1) = \ln(2)$.*

5. Montrer que $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$.

indication : il s'agit de trouver une expression de $\eta'(1)$: poser $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$, montrer que $\left(u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2 \right)$ CV et

relier $\eta'(1)$ avec u_n et $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ en séparant les termes pairs et impairs.

Exercice 52 (ICNA PSI 2017) [Solution]

1. Déterminer l'ensemble de définition de $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

2. Etudier la continuité et la dérivabilité de ζ .

3. Montrer que $\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$.

Exercice 53 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

1. Déterminer le domaine de définition D de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^x}$ et montrer que f est continue sur D .

2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donner $f'(x)$ sous forme d'une somme.

3. Calculer $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis déterminer un équivalent de $f(x) - l$ en $+\infty$.

Exercice 54 (AADN PSI 2009) [Solution]

1. Domaine de définition et limite en 0 de $f(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + x^2}$.

indication : étudier $f(x) - f(0)$.

2. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$.

indication : décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

Exercice 55 (Centrale PSI 2009) [Solution]

1. Déterminer l'ensemble de définition D de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{2n-1}}{1-x^{2n}}$.

2. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur D ? Etudier ses variations.

Exercice 56 (ENSEA-ENSIIE PC 2014) [Solution]

On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1}(x) = \int_0^x u_n(t - t^2) dt$

1. Montrer que $\forall n \geq 1, \forall x \in [0, 1], 0 \leq u_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$

2. Montrer que $\sum u_n$ converge sur $[0, 1]$ vers une fonction u dérivable telle que $u'(x) = u(x - x^2)$.

Exercice 57 (ENSAM PSI 2014) [Solution]

Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a > 0$.

1. Montrer que (f_n) définie par $f_0 = f$ et $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ est bien définie.

2. Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, calculer ses dérivées successives et leur valeur en a . En déduire une expression de f_n à l'aide d'une intégrale de f .

3. Montrer l'existence de $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ et donner une expression de g en fonction de f . (*indication : x est fixé*)

4. Montrer que g est solution d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants et en donner les solutions.

V Intégration par convergence uniforme

Exercice 58 [Solution]

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = \int_0^1 \frac{ne^{-t} + t^2}{n+t} dt$.

Exercice 59 (Mines-Ponts PSI 2013) [Solution]

On cherche $r = \frac{a}{b}$ avec $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $e^r = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On pose $P_n = \frac{1}{n!} X^n (bX - a)^n$.

1. Montrer que $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(r)$ sont des entiers pour $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
2. Montrer que $q \int_0^r P_n(t) e^t dt$ est un entier et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(t) e^t dt = 0$. Conclure.

Exercice 60 (ENSIIE PSI 2009) [Solution]

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n définie par $f_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{f_n(t)^2 + t^2} dt$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. En déduire que la suite (f_n) admet une limite simple f puis que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' = \sqrt{y^2 + t^2}$ avec $y(0) = 0$.

Exercice 61 (Mines-Télécom PSI 2019) [Solution]

Soient (α_n) telle que $\sum \alpha_n$ est absolument convergente, $\omega_n \neq 0$ et $u_n(x) = \alpha_n \cos(2\pi\omega_n x)$

1. Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est définie et continue sur $[0, 1]$.
2. Calculer $\int_0^1 f(t) dt$.
3. Justifier que $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\frac{k}{N}\right)$ converge quand N tend vers $+\infty$.

Exercice 62 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$, on pose $f(x, y) = \int_0^1 t^{xt^y} dt$.

1. Justifier l'existence de $f(x, y)$.
2. On pose $f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n!} (xt^y \ln t)^n & \text{si } t \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, 1]$.

3. En déduire $\int_0^1 t^t dt = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$.

Exercice 63 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, |\varphi(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}$. On pose $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) =$

$$\varphi(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} [\varphi(x+n) + \varphi(x-n)].$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est 1-périodique.

3. Soit g une fonction 1-périodique continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que φg est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) g(x) dx = \int_0^1 f(x) g(x) dx$.

VI Intégration terme à terme

Exercice 64 (ENSAM PSI 2011) [Solution]

1. Convergence de la série de terme général $(-1)^n a_n$ où $a_n = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} t^n dt$ et calcul de sa somme.
2. Etablir une relation entre a_n et a_{n+2} .
3. Convergence de la série de terme général a_n et calcul de la somme.

Exercice 65 (Mines-Ponts PSI 2010) [Solution]

Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{ch} x} dx$ et expression sous forme d'une série.

Exercice 66 (CCP PSI 2015) [Solution]

1. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^n}$ et $I = \int_0^1 x^x dx$ existent.
2. Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $f_{n,p}(t) = t^p (\ln t)^n$. Calculer $\int_0^1 f_{n,p}(t) dt$
3. Montrer que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$.

Exercice 67 (Mines-Ponts PSI 2021) [Solution]

Soit $x > 0$; on pose $f(x) = \int_0^1 t^{t^x} dt$. Montrer que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(xn+1)^{n+1}}$

Exercice 68 (Mines-Ponts PSI 2007) [Solution]

Pour $a > 0$ et $b > 0$, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{an+b} = \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{1+t^a} dt$.

Exercice 69 (ENTPE-EIVP PC 2015) [Solution]

Calculer $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \int_0^1 x^{2n} (1-x) dx$ de deux façons différentes et en déduire la valeur de $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

Exercice 70 (CCP PSI 2006) [Solution]

Montrer que $\frac{1}{x^\alpha} \int_0^x \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt$ existe pour $x \in]0, 1[$ et $\alpha > 0$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}(1+3n)}$

Exercice 71 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt$. On donne $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

1. Montrer que I existe
2. Montrer que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

Exercice 72 (CCINP PSI 2018) [Solution]

Montrer que $J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx$ existe et vaut $\sum_{n \geq 1} \frac{2}{n^3}$

Exercice 73 (CCINP PSI 2022) [Solution]

1. Montrer l'existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x} dx$
2. Montrer que $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$

Exercice 74 (CCP PSI 2018) [Solution]

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\operatorname{sh}(t)} dt = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 + 1}$.

indication : utiliser $|\sin(t)| \leq t$ pour appliquer le TITT

Exercice 75 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

1. Montrer l'existence de $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-t^2) \ln(t)}{t^2} dt$.

2. Montrer que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)^2}$ et en déduire la valeur de I à l'aide de constantes usuelles.

$$\text{indication : } -\ln(1-u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n} \text{ si } |u| < 1$$

Exercice 76 (Centrale PSI 2019) [Solution]

1. Soient $(u_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On pose $b_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et $a_n = b_{n+1} - b_n$.

Montrer que $\sum a_n$ converge et en déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}$.

2. Pour $x \in]-1, 0[$, on pose $f(x) = \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^x}{t} dt$.

a) Justifier que f est bien définie.

b) À l'aide de 1, montrer que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x(x-1) \dots (x-n+1)}{n \times n!}$

$$\text{indication : } (1-t)^x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x(x-1) \dots (x-n+1)}{n!} t^n \text{ si } |t| < 1$$

Exercice 77 (ENSAM PSI 2015) [Solution]

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, justifier l'existence de $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{e^x - 1} dx$.

2. Montrer que $I(\alpha) = \sum_{n \geq 1} \frac{a}{b + n^2}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

3. En déduire un équivalent de $I(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

Exercice 78 (CCINP PSI 2018) [Solution]

Soit (a_n) une suite complexe telle que $\sum |a_n|$ converge.

1. Montrer que $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Exercice 79 (CCINP PSI 2019) [Solution]

1. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1 + e^t} dt$ existe.

2. Montrer que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{1 + n^2}$

Exercice 80 (Mines-Ponts PSI 20121) [Solution]

1. Étudier la convergence et la convergence absolue de $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2}$

2. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 + e^{-2t}} \cos(xt) dt$

Exercice 81 (ENSEA PSI 2018) [Solution]

Nature et somme de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ avec $u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx$.

Exercice 82 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

1. Montrer que $\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1 + t^2} dt = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1 + t^2} dt$

2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

Exercice 83 (Mines-Ponts PSI 2015) [Solution]

1. Déterminer le domaine de convergence de $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2}$.

2. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer cette intégrale.

indication : pour le calcul de l'intégrale, on a calculé la somme de la série dans le chapitre sur les séries.

Exercice 84 (AADN PSI 2012) [Solution]

1. Montrer que la série de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(t) = t^n \sin(\pi t)$ converge simplement et déterminer la somme de $\sum_{n \geq 0} f_n$ notée F . Y a-t-il convergence uniforme ?

2. Montrer que $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$.

Exercice 85 (CCP PSI 2018) [Solution]

Soit $u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge.

indication : montrer que $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ soit par IPP, soit en vérifiant que $\sin(\pi x) \leq \pi(1-x)$

2. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$.

Exercice 86 (TPE-EIVP PSI 2018) [Solution]

Existence et valeur de $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt$ sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 87 (Mines-Ponts PSI 2022) [Solution]

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^+)$. On pose $u_n = \int_0^1 f(t)t^n dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $I = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-t} dt$.

Montrer que I et $\sum u_n$ sont de même nature. Lien entre les deux en cas de convergence ?

Solutions

Exercice 1 [sujet] 1. (f_n) CS vers 0 sur $\mathbb{R}$, uniformément sur $[-a, a]$ car $\|f_n\|_{\infty, [-a, a]} = f_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ mais pas sur $\mathbb{R}^+$ car $f_n(n) = \frac{\pi}{4}$.

2. Si $a > 1$, (f_n) CS sur I vers $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ donc pas de CU sur I (f_n est continue et pas f) ; par contre

$$\|f_n - 1\|_{\infty, [\alpha, 0]} = \frac{2}{1 + n^a \sin \frac{\alpha}{n}} \text{ donc CU sur } [\alpha, \pi/2] \text{ si } \alpha > 0.$$

Si $a = 1$ alors (f_n) CS vers $f : x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$ puis $\left| f_n(x) - \frac{x-1}{x+1} \right| \leq x - n \sin \frac{x}{n} \leq \frac{\pi}{2} - n \sin \frac{\pi}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc CU sur I .

Si $a < 1$ alors (f_n) CS vers -1 et $|f_n(x) + 1| \leq 2n^a \sin(x/n) \leq 2n^a \sin \frac{\pi}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc CU sur I .

Exercice 2 [sujet] (f_n) CS vers 0 ; si $x \geq a$ alors $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1 + n^2 a^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc CU sur $[a, +\infty[$ et $(f_n(1/n))$ ne tend pas vers 0 donc pas CU sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 3 [sujet] Si $x > 0$ alors $f_n(x) = \frac{2n^2 x^2 + nx + 1}{2n^2 x + 1} \sin^2 \frac{\pi}{x}$ à partir d'un certain rang donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = x \sin^2 \frac{\pi}{x}$ et $f_n(0) = 0$. Si $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $|f_n(x) - f(x)| = x \sin^2 \frac{\pi}{x} \leq x \leq \frac{1}{n}$ et si $x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $|f_n(x) - f(x)| = \frac{|(n+1)x + 1|}{2n^2 x + 1} \sin^2 \frac{\pi}{x} \leq \frac{(n+1)x + 1}{2n^2 x + 1} \stackrel{\text{étude fct}}{\leq} \frac{1}{n}$ donc $\|f_n - f\|_{\infty} \leq \frac{1}{n}$ donc CVU sur $[0, 1]$

Exercice 4 [sujet] 1. (f_n) CS vers $\cos$ sur $\mathbb{R}$

2. si $x \in [-a, a]$ alors $|f_n(x) - \cos(x)| = 2 \left| \sin \frac{x}{n} \sin \left(2 + \frac{1}{n}\right) x \right| \leq \frac{2a}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc CU sur $[-a, a]$; par contre $|f(n\pi) - \cos(n\pi)| = 2$ donc pas de CU sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 [sujet] 1. $f(x) = x$ puis, pour $x \geq 0$, $|f_n(x) - x| = \frac{x}{1 + nx} \leq \frac{1}{n}$ alors que si $x < 0$, $|f_n(x) - x| = \frac{-x}{1 + nx^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ (étude de fct) donc CVU sur $\mathbb{R}$.

2. si $x > 0$, $f'_n(x) = \frac{nx(2x + nx)}{(1 + nx)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, $f'_n(0) = 0$ et pour $x < 0$, $f'_n(x) = \frac{nx^2(3 + nx^2)}{(1 + nx^2)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$; pas de CVU sur $[-1, 1]$ car les f'_n sont continues en 0 et pas la limite simple de f'_n

Exercice 6 [sujet] 1. $|g'_n(t)| = \frac{t}{n} e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \leq \frac{e^t}{t}$ puis par IAF, $|g(t) - g(0)| \leq \frac{te^t}{n}$

2. On a $\left| I_n(x) - \int_0^x 1 dt \right| \leq \int_0^x \left| e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n - 1 \right| dt \leq \frac{1}{n} \int_0^x te^t dt \leq \frac{1}{n} \int_0^1 te^t dt$ donc (f_n) CU sur $[0, 1]$ vers $f : x \mapsto \int_0^x dt = x$.

Exercice 7 [sujet] Si $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$ alors $f(x) = \sqrt{x}$ (car $f_n(x) \geq 0$) puis $|f_{n+1}(x) - \sqrt{x}| = |f_n(x) - \sqrt{x}| \left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + f_n(x))\right) \leq \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) |f_n(x) - \sqrt{x}|$ ce qui donne par récurrence $|f_n(x) - \sqrt{x}| \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n = g_n(\sqrt{x})$; on étudie $g_n(t) = t \left(1 - \frac{t}{2}\right)^n$ pour trouver $\|g_n\|_{\infty} = g_n\left(\frac{2}{n+1}\right) \leq \frac{2}{n+1}$ donc $\|f_n - \sqrt{\cdot}\|_{\infty} \leq \|g_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc (f_n) CU sur $[0, 1]$ vers la fonction racine carrée.

Exercice 8 [sujet] 1. cours

2. $S_{n,0}$ facile ; si $k \geq 1$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ donc $S_{n,1}(x) = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} - nx S_{n,0}(x) \stackrel{j=k-1}{=} nx(x + 1 - x)^{n-1} - nx = 0$

3. on a $\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) - \left(\frac{k}{n} - x\right) f'(x) \right| \leq \frac{M}{2} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2$ avec $M = \max_{[0,1]} |f''|$ (th des bornes atteintes) ; en sommant et avec l'inég triangulaire, on obtient $\left| B_n(f) - S_{n,0}(x)f(x) - \frac{1}{n} S_{n,1}(x)f'(x) \right| \leq \frac{M}{2n^2} S_{n,2}(x)$ qui donne le résultat.
 $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ donc $\|B_n(f) - f\|_{\infty} \leq \frac{M}{8n}$ donc $(B_n(f))$ CVU sur $[0, 1]$ vers f .

- Exercice 9** [sujet] 1. On a $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ pour $x \in [0, 1]$ fixé donc $\sum u_n$ CS sur $[0, 1]$. De plus $\|u_n\|_\infty = u_n\left(\frac{a}{a+nb}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{a}{b}\right)^a e^{-a} \frac{1}{n^{a-c}}$ donc CN sur $[0, 1]$ si et seulement si $a - c > 1$.
2. $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc CS sur $\mathbb{R}^{+*}$. Puis $u'_n(x) = n(\alpha - 2nx^2)x^{\alpha-1}e^{-nx^2}$ on discute sur le signe de α :
- Si $\alpha < 0$ alors u_n n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc la CN n'a même pas de sens.
 - Si $\alpha = 0$ alors $\|u_n\|_\infty = \lim_{x \rightarrow 0} u_n(x) = n$ donc pas de CN.
 - Si $\alpha > 0$ alors $\|u_n\|_\infty = u_n\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2n}}\right) = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\alpha/2} \times \frac{1}{n^{\alpha/2-1}}$ donc CN si et seulement si $\alpha/2 - 1 > 1$

- Exercice 10** [sujet] 1. (f_n) CVS vers 0 sur $[0, 1]$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$; $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{e}$ donc (f_n) CVU sur $[0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$
2. $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum f_n$ CVS sur $[0, 1]$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$; d'après la première question, $\sum f_n$ CVN sur $[0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 0$. Si $\alpha \geq 0$ alors $R_n\left(\frac{1}{n}\right) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} k^\alpha \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \geq n \times (n+1)^\alpha \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} \sim \frac{n^\alpha}{e^2}$ qui ne tend pas vers 0 donc pas de CVU sur $[0, 1]$

- Exercice 11** [sujet] 1. (f_n) CVS sur $\mathbb{R}$ vers 0; $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{4}{n}\right) = \frac{4e^{-4}}{n}$ donc CVU sur $\mathbb{R}$.
2. $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$ donc ACV sur $\mathbb{R}$; pas de CVN sur $\mathbb{R}$ avec la première question mais CVN sur $E = \mathbb{R} \setminus]-a, a[$ car $\|f_n\|_{\infty, E} = f_n(a)$ pour n grand et la CVS en a donne la CVN sur E .

- Exercice 12** [sujet] 1. $g'_n(x) = \cos^n x [(n+1)\cos(x) - n]$ donc $\|g_n\|_\infty = g_n\left(\arccos \frac{n}{n+1}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$
2. $\|f_n\|_\infty \leq \frac{\pi}{2} \|g_n\|_\infty \leq \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc (f_n) CVU sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers 0.
- $\sum f_n$ CVS sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; $S(x) = \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)}$ si $x \neq 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = 2$ alors que $S(0) = 0$ donc pas de CVU sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Il y a par contre CVN sur tout segment de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ car $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq b \cos^n(a)$ (car $\cos$ décroît sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) et $|\cos(a)| < 1$.

- Exercice 13** [sujet] 1. si $|\cos(x)| < 1$ alors $\sum u_n(x)$ CV et $u_n(0) = 0$ donc $\sum u_n(0)$ CV aussi. Puis $f(x) = \sum_{n \geq 0} u_n(x) = \frac{\sin^\alpha x}{1 - \cos(x)}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.
2. $\|u_n\|_\infty = u_n\left(\arctan \sqrt{\frac{\alpha}{n}}\right) = \left(\frac{\sqrt{\alpha/n}}{1 + \alpha/n}\right)^\alpha \left(\frac{1}{1 + \alpha/n}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha^{\alpha/2} e^{-\alpha} \frac{1}{n^{\alpha/2}}$ donc CN sur $[0, \pi/2]$ si et seulement si $\alpha > 2$.
- Si $\alpha \leq 2$ alors $\frac{\sin^\alpha x}{1 - \cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x^{\alpha-2}$ donc f n'est pas continue en 0; comme les u_n sont continue en 0, la convergence n'est pas uniforme non plus.

- Exercice 14** [sujet] 1. (f_n) CS vers 0 sur $\mathbb{R}^+$ et $\|f_n\|_\infty = f_n(n) = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc (f_n) CVU vers 0 sur $\mathbb{R}^+$.
2. $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers 1 et la convergence ne peut pas être uniforme sur $\mathbb{R}^+$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
- On a par contre CN sur tout segment puisque $\|f_n\|_{\infty, [0, a]} \leq \frac{a^n}{n!}$

- Exercice 15** [sujet] 1. Étudier 2 fonctions
2. On vérifie $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$ donc $1 + \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)} > 0$ puis $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right) = \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série CVS sur $\mathbb{R}$.

On a $\left| f_n(t) - \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)} \right| \leq \frac{2x^2}{n^2(1+x^2)^2}$ car $\left| \frac{x}{n(1+x^2)} \right| \leq \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2}$. On en déduit $\left\| f_n(t) - \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)} \right\|_\infty \leq \frac{1}{2n}$; de plus $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)} = \frac{x}{1+x^2} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ CVU sur $\mathbb{R}$ (la somme est une constante). Comme $\sum_{k=1}^n f_k(t) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k x}{k(1+x^2)} + \sum_{k=1}^n \left(f_k(t) - \frac{(-1)^k x}{k(1+x^2)} \right)$, somme d'une série CVU et d'une série CVN sur $\mathbb{R}$, on en déduit $\sum f_k$ CVU sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 [sujet] 1. $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^{\ln x}}$ donc $\sum f_n$ CS sur $]1, +\infty[$

2. La convergence absolue n'étant vérifiée que sur $]e^2, +\infty[$, il ne peut pas y avoir CN sur $]1, +\infty[$.

3. Par CSSA, on a $|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^{\ln x}} \leq \frac{1}{(n+1)^{\ln a}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc CU sur $[a, +\infty[$ si $a > 1$; comme les f_n sont continues sur $]1, +\infty[$, on en déduit que la somme est aussi continue sur $]1, +\infty[$.

4. $\left| f_n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right| = \exp \left[-\ln(n) \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n} \right) \right) \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $\|f_n\|_\infty \geq 1$. Si on avait CU sur $]1, +\infty[$, on aurait $\|f_n\|_\infty = \|R_{n-1} - R_n\|_\infty \leq \|R_{n-1}\|_\infty + \|R_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui n'est pas le cas.

Exercice 17 [sujet] 1. $f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

2. $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} = f_n(b)$ donc CN sur tout segment

3. $S(x+1) - S(x) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1} \right) = \frac{1}{1+x}$ par télescopage; on a $S(x) = -\frac{1}{1+x} + S(x+1) \stackrel{=}{=} -\frac{1}{1+x} + S(0) + o(1)$ par continuité de S en 0.

4. $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ donc non

Exercice 18 [sujet] 1. $D = \mathbb{R}^+$.

2. CVNTS avec $|f_n(x)| \leq \frac{b}{n^{1+a}}$ et $1+a > 0$.

3. $f(x) \geq f_1(x) + \int_1^{+\infty} \frac{x}{t^{1+x}} dt = x+1$ donc f ne tend pas vers $f(0) = 0$ en 0

4. $\lim_{+\infty} f - id = 0$ par double limite avec CVN sur $[1, +\infty[$ car f_n décroît sur $\left[\frac{1}{\ln(n)}, +\infty \right[$.

Exercice 19 [sujet] 1. Si $x > 1$ alors $u_n(x) \stackrel{=}{=} o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right)$ donc $\sum u_n(x)$ CV, $u_n(1) = 0$ et si $x < 1$, $\sum u_n(x)$ DVG. Ainsi, $D_f = [1, +\infty[$.

2. On a $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n \ln(n)}$ et $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ DV (Bertrand)

3. Si $x > 1$, $|R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^k \ln(n+1)} = \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{\ln(x)/x^{n+1}}{1-1/x} \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{\ln(x)}{x-1} \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$ car on vérifie que $\ln(x) \leq x-1$. L'inégalité finale reste aussi valable si $x = 1$ donc $\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc la série CU sur $[1, +\infty[$ et comme les u_n sont continues sur ce domaine, on en déduit que la somme de cette série est elle aussi continue sur $[1, +\infty[$.

Exercice 20 [sujet] 1. On a $u_n(x) \stackrel{=}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc CS sur $\mathbb{R}^{++}$; $R_n(1/n) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{e^{-k/n}}{k+1} \geq e^{-2} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k+1} \geq e^{-2} \frac{n}{2n+1}$ ne tend pas vers 0 donc $\|R_n\|_\infty$ non plus.

2. On a $\|u_n\|_{\infty, [a, b]} \leq u_n(a)$ donc CN sur tout segment de $\mathbb{R}^{++}$ puis f est continue. De même $\|u'_n(x)\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{ne^{-na}}{1+n} \stackrel{=}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u'_n$ CN sur tout segment de $\mathbb{R}^{++}$ d'où la classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{++}$.

3. En $+\infty$: $\|u_n\|_{\infty, [1, +\infty[} = u_n(1)$ donc CN sur $[1, +\infty[$, le théorème de double limite s'applique et $\lim_{+\infty} f = 1$.

En 0: f est décroissante donc admet une limite $l \in \mathbb{R}^+ \cap \{+\infty\}$; si $l \neq +\infty$ alors $l \geq f(x) \geq \sum_{n=0}^N u_n(x)$ pour

tout $N \in \mathbb{N}$; en faisant tendre x vers 0 dans l'inégalité (somme finie), on aurait $l \geq \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+1}$ ce qui est absurde puisque cette somme partielle de SATP DV vers $+\infty$. On a donc $l = +\infty$.

- Exercice 21** [sujet] 1. On a $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq b^{2-\alpha} e^{-na} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc CN sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$ et la f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. $\|f_n\|_{\infty} = u_n \left(\frac{2-\alpha}{n}\right) = (2-\alpha)^{2-\alpha} e^{\alpha-2} \frac{1}{n^{2-\alpha}}$ donc CN sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si $\alpha < 1$.
3. Si $\alpha = 1$ alors $f(x) = \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ et comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 0$, le théorème de double limite assure qu'il n'y a pas CU sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- Exercice 22** [sujet] 1. Comme $\ln\left(1 - \frac{k}{t}\right) \leq -\frac{k}{t}$ (si $k < t$) donc $\|u_k\|_{\infty} \leq e^{-k}$ donc CN sur $[1, +\infty[$.
2. $\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{p=1}^{n-1} \left(1 - \frac{p}{n}\right)^n = \sum_{p=1}^{n-1} u_p(n) = f(n)$; on calcule alors la limite de f en $+\infty$ par le théorème de double limite :
- $$\lim_{t \rightarrow +\infty} u_k(t) = e^{-k} \text{ donc } \lim_{+\infty} f = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k} = \frac{1}{e-1}.$$

- Exercice 23** [sujet] 1. Si $x > 0$, $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2e^{-nx}$ donc CS sur $\mathbb{R}^*$ par imparité
2. $e^x f(x) = \sum_{n \geq 1} g_n(x)$ avec $|g_n(x)| \leq \frac{2}{e^{n-1} - 1}$ si $x \geq 1$ donc $\sum g_n$ CN sur $[1, +\infty[$ et le théorème de double limite permet de conclure
3. $f_n(x)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 4e^{-2nx}$ donc CS sur $\mathbb{R}^*$ aussi. On trouve de même $\sum_{n \geq 1} f_n(x)^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 4e^{-2x}$

- Exercice 24** [sujet] 1. f_n est impaire et, si $x > 0$, $f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2e^{-nx}$ et $0 < e^{-x} < 1$ donc $D = \mathbb{R}^*$
2. CVNTS de $\mathbb{R}^{+*}$ avec $|f_n(x)| \leq f_n(a)$ si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$
3. f_n décroît sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc f aussi
4. $\frac{\text{sh } x}{\text{sh } nx} = e^{-(n-1)x} \frac{1 - e^{-2x}}{1 - e^{-2nx}} \leq e^{-(n-1)x}$. On a alors $0 \leq f(x) - \frac{1}{\text{sh } x} = \frac{1}{\text{sh } 2x} + \sum_{n=3}^{+\infty} f_n(x) \leq \frac{1}{\text{sh } 2x} + \sum_{n=3}^{+\infty} e^{-(n-1)x} = \frac{1}{\text{sh } 2x} + \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-x})$ et $\frac{1}{\text{sh } x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2e^{-x}$

- Exercice 25** [sujet] 1. Si $|a| < 1$ alors $\frac{a^n}{x+n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(a^n)$ donc CS sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$, idem pour $a = -1$ par CSSA; pour $a = 1$ ou $|a| > 1$ la série DV
2. $|u_n(x)| \leq a^n$ si $n \geq 1$ donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ CN sur $\mathbb{R}^{+*}$
3. $aS(x+1) = S(x) - \frac{1}{x}$ donc $S(x) = aS(x+1) + \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$ car $S(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} S(1)$ par continuité (donc $o\left(\frac{1}{x}\right)$)
4. $xS(x) - \frac{1}{1-a} = \sum_{n \geq 0} a^n \left(\frac{x}{x+n} - 1\right) = -\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{1+x/n}$ puis $\left|\frac{a^n}{1+x/n}\right| \leq a^n$ donc la série CN sur $[1, +\infty[$ et le théorème de double limite donne la réponse.

- Exercice 26** [sujet] 1. si $x > 0$, $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc CS sur $\mathbb{R}^{+*}$ et DVG si $x \leq 0$.
2. si $x \geq a$ alors $|f_n(x)| \leq f_n(a)$ donc CN sur $[a, +\infty[$ mais $\|f_n\|_{\infty} = 1$ donc pas sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. f est continue par CN sur tout segment et $\lim_{+\infty} f = 0$ par CN sur $[1, +\infty[$ et théorème de double limite.
4. Comparaison série intégrale et changement de variable $u = x\sqrt{t}$ dans $\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt$.

- Exercice 27** [sujet] 1. $D_f = \mathbb{R}^*$ et f est paire. f est continue par CVNTS de $\mathbb{R}^{+*}$ avec $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} = f_n(a)$
2. Par double limite, $\lim_{+\infty} f = 1$ par CVN sur $[1, +\infty[$ avec $\|f_n\|_{\infty, [1, +\infty[} = f_n(1)$

3. Par comparaison série intégrale, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2 t^2} dt \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x^2 t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-x^2 t^2} dt \stackrel{u=xt}{=} \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$
ce qui donne $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.
- 4.
- 5.

Exercice 28 [sujet] 1. CSSA

2. $|f'_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ si $n \geq 1$ donc $\sum_{n \geq 1} f'_n$ CN sur $\mathbb{R}^{+*}$ (et f_0 est aussi $\mathcal{C}^1$); $f'(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ vérifie le CSSA donc $f'(x)$ est du signe de $f'_0(x) \leq 0$
3. Par télescopage $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$; par continuité de f en 1, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} - f(1) + o(x) \sim \frac{1}{x}$ et avec la décroissance de f , on a $\frac{1}{2x} \leq f(x) \leq \frac{1}{2(x-1)}$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$

Exercice 29 [sujet] 1. Si $x \in]-1, 1[$ alors $f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x^n$ donc $\sum f_n(x)$ est ACV; si

$$x \in [-a, a] \subset]-1, 1[, |f'_n(x)| \leq \frac{na^{n-1}}{(1-a^n)^2} \sim na^{n-1} \text{ donc } \sum f'_n \text{ CN sur tout segment de }]-1, 1[$$

2. Calcul de l'intégrale facile. Par décroissance de φ_x , on a $\int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt \leq f(x) \leq f_1(x) + \int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt$ donc
 $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{\ln(1-x)}{\ln x} \sim \frac{\ln(1-x)}{x-1}$

Exercice 30 [sujet] 1. Si $x \in]-1, 1[$ alors $f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x^n$ donc $\sum f_n(x)$ est ACV; si $x \in [-a, a] \subset]-1, 1[$,

$$|f'_n(x)| \leq \frac{na^{n-1}}{(1-a^n)^2} \sim na^{n-1} \text{ donc } \sum f'_n \text{ CN sur tout segment de }]-1, 1[$$

2. $v_n(x) = \frac{(-1)^n}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^n}}$ donc $\sum v_n(x)$ vérifie le CSSA; on a donc $|R_n(x)| \leq |v_{n+1}(x)| \leq |v_{n+1}(1)| = \frac{1}{n+1}$ car $|v_n|$ est une fonction croissante sur $[0, 1]$.

$$\text{On en déduit, par double limite, } (1-x)f(x) = \sum_{n \geq 1} v_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2 \text{ donc } f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{-\ln 2}{1-x}$$

Exercice 31 [sujet] 1. Cours

2. $\int_0^x e^{-\sqrt{t}} dt \stackrel{u=\sqrt{t}}{=} 2 \int_0^{\sqrt{x}} ue^{-u} du$; on trouve ensuite $t \mapsto -2e^{-\sqrt{t}}(\sqrt{t} + 1)$
3. a) Si $x \in]0, 1[$, $e^{\sqrt{t} \ln(x)} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ alors que si $x \geq 1$, $x^{\sqrt{t}} \geq 1$ donc $D_I =]0, 1[$ puis $I(x) \stackrel{u=t(\ln x)^2}{=} \frac{1}{(\ln x)^2} \int_{(\ln x)^2}^{+\infty} e^{-\sqrt{u}} du$
donc $I(x) = 2 \frac{x(1-\ln x)}{(\ln x)^2}$
- b) S est définie sur $]0, 1[$ (mêmes arguments que pour I) et par comparaison série/intégrale, on trouve $I(x) \leq S(x) \leq 1 + I(x)$ donc $S(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{2}{(\ln x)^2} \sim \frac{2}{(1-x)^2}$

Exercice 32 [sujet] 1. $u_n(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(t^n)$ donc CS sur $[0, 1[$; $u_n(1) = 0$ et DVG si $t > 1$ car $H_n \leq n$. La fonction u_n est décroissante (et négative) sur $]0, e^{-1/n}]$ donc si n est assez grand (dépendant de a), $\|u_n\|_{\infty, [0, a]} = -u_n(a)$ donc CN sur $]0, a[$; par contre $\|u_n\|_{\infty} = u_n(e^{-1/n}) = \frac{e^{-1}}{nH_n}$ donc avec $H_n \sim \ln(n)$, pas de CN sur $]0, 1[$ (Bertrand).

2. Si $t \in]0, 1[$, $|R_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k |\ln(t)|}{H_{n+1}} = \frac{-\ln(t)t^{n+1}}{H_{n+1}(1-t)} \leq \frac{-\ln(t)t}{H_{n+1}(1-t)}$; la fonction $t \mapsto \frac{-\ln(t)t}{1-t}$ est prolongeable par continuité au segment $[0, 1]$ donc bornée; $|R_n(t)| \leq \frac{C}{H_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (valable si $t = 1$) aussi donc CU sur $]0, 1[$ et S est continue sur $]0, 1[$.

$$\frac{S(t) - S(1)}{t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n \ln(t)}{H_n(t-1)} \text{ et il existe } K > 0 \text{ tel que si } t \in [1/2, 1[, \frac{\ln(t)}{t-1} \geq K \text{ puis } \frac{S(t) - S(1)}{t-1} \geq K \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{H_n} \geq -K \ln(1-t) \text{ car } H_n \leq n; \text{ on a donc } \frac{S(t) - S(1)}{t-1} \xrightarrow{t \rightarrow 1} +\infty \text{ donc } S \text{ n'est pas dérivable en } 1.$$

Exercice 33 [sujet] 1. Si $x > 0$ $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-nx}$ donc la série CV car $|e^{-x}| < 1$ puis DVG pour $x \leq 0$ et $D = \mathbb{R}^{+*}$.

2. $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} = f_n(a)$ donne la continuité ; toutes les f_n sont strictement décroissantes donc f aussi.

3. $\lim_{+\infty} f = 0$ par double limite avec $\|f_n\|_{\infty, [1, +\infty[} = f_n(1)$.

4. Pour $x > 0$, on trouve $\int_1^{+\infty} \ln(1 + e^{-xt}) dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-xt}) dt$; on trouve $\int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-xt}) dt \stackrel{y=e^{-xt}}{=} \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} dy = \frac{1}{x} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, par CVU sur $[0, 1]$ car $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$, et comme $\left| \int_0^1 \ln(1 + e^{-xt}) dt \right| \leq \ln 2$, on trouve le même équivalent pour le terme de gauche et $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\pi^2}{12x}$

Exercice 34 [sujet] 1. On prouve par récurrence que $u_n(x) \geq 1$ donc $(u_n(x))$ est définie. $u_{n+1}(x) - u_n(x) \geq 0$ donc $(u_n(x))$ croît ; si elle CV vers ℓ alors on a $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$ qui n'a pas de solution donc $\lim u_n(x) = +\infty$.

2. $\sum f_n(x)$ CV par CSSA avec la question 1

3. Par CSSA, $\|R_n\|_{\infty} \leq \|f_{n+1}\|_{\infty} = f_{n+1}(1)$ car u_n est croissante sur $[1, +\infty[: u'_{n+1}(x) = u'_n(x) \frac{u_n(x)^2 - 1}{u_n(x)^2} \geq 0$ par récurrence. La CVS de (f_n) en 1 donne la CVU de $\sum f_n$ sur $[1, +\infty[$ puis la continuité de f (les f_n sont continues par récurrence).

Par contre $\|f_n\|_{\infty} = |f_n(1)| = u_{n+1}(1) - u_n(1)$ donc $\sum f_n(1)$ DV (série télescopique)

Exercice 35 [sujet] 1. $\left| \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) \right| \leq C \frac{a}{2^n}$ donc CVN sur I

2. facile

3. si f et g sont solutions et $u = f - g$, on a $u(x) = u\left(\frac{x}{2}\right) \stackrel{\text{rec}}{=} u\left(\frac{x}{2^n}\right)$ et, comme u est continue en 0, en faisant tendre n vers $+\infty$, on trouve $u(x) = u(0) = 0$ donc u est nulle. Il y a donc une unique solution (qui est S)

4. si $u_n(x) = \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ alors $|u'_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \|\varphi'\|_{\infty}$ car φ' est continue donc bornée sur le segment I . $\sum u'_n$ CVN sur I donc S est $\mathcal{C}^1$.

Exercice 36 [sujet] Si f est solution alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(2^{-n}x) = f(0)$ par continuité en 0 de f donc $f(x) = f(0) +$

$\sum_{n \geq 0} (f(2^{-n}x) - f(2^{-(n+1)}x))$ par télescopage puis $f(x) = f(0) + \sum_{n \geq 0} \ln\left(1 + \frac{x^2}{4^{n+1}}\right)$. Réciproquement, toute fonction

de cette forme est solution car continue sur $\mathbb{R}$ par CN sur tout segment : $\|f_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq \frac{a^2}{4^{n+1}}$.

Exercice 37 [sujet] 1. $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$ (si $x \neq 0$) donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^{-*}$

2. $\|f'_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+} \leq \frac{1}{n^2}$ donc $\sum f'_n$ CVN sur $\mathbb{R}^+$.

3. $f(1) = 1$ par télescopage et $f(p) = \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(p)$.

Exercice 38 [sujet] 1. $\|f_n\|_{\infty} = \frac{1}{n^2}$ donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. $f'_n(x) = \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$ donc $\sum f'_n$ CVN sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$ car $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} = f'_n(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3 a^2}$ donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (f est impaire) mais f n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$: si on suppose f' continue en 0, on a, pour $x > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$, $f'(x) \geq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(1+k^2x^2)}$ puis en faisant tendre x vers 0 (somme finie et on a supposé $\lim_0 f' = f'(0)$), on aurait $f'(0) \geq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, ce qui est absurde car $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} = +\infty$.

Exercice 39 [sujet] 1. $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^3}$

2. $\sum f'_n$ CVNTS $[-a, a]$ de $\mathbb{R}$ car, si $|x| \leq a$, $|f'_n(x)| \leq \frac{n|\sin nx|}{n^3 + x^2} + \frac{2|x \cos nx|}{(n^3 + x^2)^2} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{2a}{n^6}$

Exercice 40 [sujet] 1. $\lim_{x \rightarrow 0} f = 1$ et par convexité de sh sur $\mathbb{R}^+$, on a $\text{sh}(x) \geq x \geq 0$ donc $0 \leq f(x) \leq 1$ sur $\mathbb{R}^+$ donc sur $\mathbb{R}$ par parité.

2. $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

3. On applique le théorème de dérivation avec $|f'_n(x)| = \frac{2n \text{ch}(nx)}{\text{sh}^3 nx}$ qui décroît (redériver) donc $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} = \frac{2n \text{ch}(na)}{\text{sh}^3 na} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ si $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$

4. $f_n(x) = \frac{f(nx)^2}{n^2 x^2}$ donc $S(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(nx)^2}{n^2}$ et par double limite, $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(nx)^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ car $\left| \frac{f(nx)^2}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ donc CVN sur $]0, 1[$

5. $\frac{1}{f(x)} = \frac{\text{sh} x}{x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ car DSE sur $\mathbb{R}$ (utiliser le DSE de sh) et ne s'annule pas car $f(0) = 1$ donc f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 41 [sujet] 1. Par CSSA avec $\sqrt{n+x} - \sqrt{n} = \frac{x}{\sqrt{n+x} + \sqrt{n}}$

2. CVUTS sur $\mathbb{R}^+$ avec CSSA et $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \sqrt{n+1+b} - \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^+$.

$f'_n(x) = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n+x}}$ donc CVUTS par CSSA avec $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f'_k(x) \right| \leq \frac{2}{\sqrt{n+a}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. (pas sur $\mathbb{R}^+$ car f_0 n'est pas

dérivable en 0). Puis $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{\sqrt{n+x}} \geq 0$ tjs par CSSA

3. Si f ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$ alors f CV vers ℓ (croissante) et $f(x) \leq \ell$. Comme $R_n(x)$ est du signe de $f_{n+1}(x)$, $R_{2n+1}(x) \geq 0$ donc $\ell \geq f(x) = S_{2n+1}(x) + R_{2n+1}(x) \geq S_{2n+1}(x) = \sum_{p=0}^n f_{2p}(x) - f_{2p+1}(x)$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{2p}(x) - f_{2p+1}(x) = \sqrt{2p+1} - \sqrt{2p}$, en faisant tend x vers $+\infty$ (somme finie), on aurait $\ell \geq \sum_{p=0}^n \sqrt{2p+1} - \sqrt{2p}$, pour tout n ; ce qui est absurde puisque c'est la somme partielle d'une SATP DV

Exercice 42 [sujet] 1. Si $x \neq 0$ alors $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$ et $u_n(0) = 0$ donc $D = \mathbb{R}$ (et S est paire).

2. $\|u_n\|_{\infty, [-a, a]} = u_n(a)$ donc CN sur tout segment de $\mathbb{R}$.

3. Pour $x > 0$, $0 \leq u'_n(x) = \frac{2x}{\ln(1+n)(1+n^2x^2)} \leq \int_{n-1}^n \frac{2x}{\ln(1+t)(1+t^2x^2)} dt$ donc $\sum u'_n(x)$ CS et $0 \leq R_n(x) \leq \int_n^{+\infty} \frac{2x}{\ln(1+t)(1+t^2x^2)} dt \leq \frac{1}{\ln(1+n)} \int_n^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2t^2} dt = \frac{2}{\ln(1+n)} \left[\arctan(xt) \right]_{t=n}^{t=+\infty} \leq \frac{\pi}{\ln(1+n)}$ donc CVU sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $\mathbb{R}$ par parité.

4. Facile

Exercice 43 [sujet] 1. $f_n(0) = \frac{1}{n}$ et $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{xn^2}$ (signe fixe) donc $D_S = \mathbb{R} \setminus \{-1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$

2. $f'_n(x) = \frac{-1}{n(nx+1)^2}$ donc $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} = \frac{1}{n(na+1)^2} \sim \frac{1}{n^3 a^2}$ donc $\sum f'_n$ CVNTS de $\mathbb{R}^{+*}$

3. $\left| S(s) - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 x} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 x(nx+1)} \leq \frac{1}{x^2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ donc $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 44 [sujet] 1. Si $x < 0$ alors DVG et sur $\mathbb{R}^+$, $\|f_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{1+n^2}$ donc CS et CN sur $\mathbb{R}^{+*}$

2. oui : cf 1.

3. Par double limite et CN sur $\mathbb{R}^+$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 1$

4. Si $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} = \frac{ne^{-na}}{1+n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum f'_n$ CN sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$

5. $-f'(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{n}{n^2+1} e^{-nx}$ est décroissante donc admet une limite $l \in \mathbb{R} \cap +\infty$ en 0; si $l \neq +\infty$ alors pour tout N , on a $l \geq \sum_{n=0}^N \frac{n}{n^2+1} e^{-nx}$ puis quand $x \rightarrow 0$ (somme finie), $l \geq \sum_{n=0}^N \frac{n}{n^2+1}$ ce qui est absurde puisque la somme

partielle de cette SATP DV vers $+\infty$; on a donc $\lim_0 f' = -\infty$ et comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$, par le TAF, on obtient que $\lim_0 \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_0 f' = -\infty$

Exercice 45 [sujet] 1. $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ si $x > 0$, $f_n(0) = 0$ et DVG si $x > 0$ donc $D_f = \mathbb{R}^+$.

2. Si $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{e^{-na}(1+nb)}{\ln n}$ donc $\sum f'_n$ CVN sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$

3. $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \sum_{n \geq 2} \frac{e^{-nx}}{\ln n}$ est une fonction décroissante donc tend vers $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en 0; comme la série est à termes positifs, on a $g(x) \geq \sum_{n=2}^N \frac{e^{-nx}}{\ln n}$ pour tout $N \geq 2$; si on suppose l finie, quand $x \rightarrow 0$, on obtient $l \geq \sum_{n=2}^N \frac{1}{\ln n}$ pour tout N ce qui est absurde (somme partielle d'une SATP DV). On en déduit $l = +\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0.

On prouve la CVU de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$ (car il n'y a pas CVN) : $|R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \sum_{k \geq n+1} x e^{-kx} = \frac{1}{\ln(n+1)} \times \frac{x e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} \leq \frac{C}{\ln(n+1)}$ car $x \mapsto \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}}$ est bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 46 [sujet] 1. CSSA (indispensable pour $x = 0$)

2. CVU sur $\mathbb{R}^+$ car, par CSSA, $|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$

3. CVNTS de $\sum u'_n$ car $|u'_n(x)| \leq e^{-na}$ pour $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$

4. On a aussi $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ donc $S(x) = -\ln(1 - e^{-x}) + C$ pour $x > 0$. On trouve ensuite $C = 0$ car $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0$ par double limite (et CVU sur $\mathbb{R}^+$) et on étend à $x = 0$ par continuité de S en 0 (donc $S(0) = -\ln(2)$)

Exercice 47 [sujet] 1. Sur $\mathbb{R}^+$, $\|f_n\|_{\infty} = \frac{1}{n^2}$ donc CN sur $\mathbb{R}^+$ et DVG si $x < 0$.

2. Continue sur $\mathbb{R}^+$ par CN sur $\mathbb{R}^+$. Puis $u'_n(x) = \frac{-e^{-nx}}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-nx})$ donc $\sum f'_n$ CS sur $\mathbb{R}^{+*}$ et si $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\|u''_n\|_{\infty, [a, b]} = e^{-na}$ donc $\sum u''_n$ CN sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$

3. $f''(x) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$ puis $f'(x) = C + \ln(1 - e^{-x})$ avec $C = \lim_{+\infty} f' = 0$ car $\|f'_n\|_{\infty, [1, +\infty[} = \frac{e^{-n}}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-n})$ donc $\sum f'_n$ CN sur $[1, +\infty[$ et le théorème de double limite donne la limite de f' en $+\infty$.

4. On a $\lim_0 f' = -\infty$ et f est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc le TAF donne f non dérivable en 0.

5. $t \mapsto \ln(1 - e^{-t})$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (car $\underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t)$) donc $x \mapsto \int_0^x \ln(1 - e^{-t}) dt$ est la primitive de f' qui tend vers 0 en 0, c'est donc $f - f(0)$.

Exercice 48 [sujet] 1. Si $|x| < 1$ alors $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x^n$ donc la série est ACV, si $x \geq 1$, DVG et si $x \leq -1$ les termes n'existent pas

2. $\|u_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq a^n$ donc CN sur tout segment de $] -1, 1[$ puis continuité sur $] -1, 1[$; $\|u'_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq na^{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u'_n$ CN sur tout segment de $] -1, 1[$. On a alors $f'(0) = 1$ et par Taylor-Young, $f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

3. ϕ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et $\phi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{t \ln(x)}$ avec $\ln(x) < 0$ donc ϕ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Par comparaison à une intégrale, f est équivalente en 1 à $\int_0^{+\infty} \phi(t) dt \stackrel{u=e^{t \ln(x)}}{=} \frac{-1}{\ln(x)} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} dt$

Exercice 49 [sujet] 1. Si $x \neq 0$ alors $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1/x}{n^2}$ (signe fixe) donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$

2. Si $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1}{n^2 a^2}$ donc $\sum f'_n$ CN sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$

3. Par comparaison avec une intégrale, f est équivalente à $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2x}$ en 0 puis calculer cette intégrale.

En $+\infty$, $xf(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + n/x}$ qui CN sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\left| \frac{1}{n^2 + n/x} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ et le théorème de double limite donnera

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 50 [sujet] 1. Si $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{xn^2}$ et $f_n(0) = 0$ donc CS sur $\mathbb{R}$ (et impaire). De plus, si $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{b}{n(1+na^2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b}{an^2}$ donc CN sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$ et continuité sur $\mathbb{R}^{+*}$; de même $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1+nb^2}{n(1+na^2)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b^2}{a^2n^2}$ donc $\sum f'_n$ CN sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$ et f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour la continuité en 0 : si $x > 0$, par comparaison à une intégrale, f est équivalente en 0 à $\int_1^{+\infty} \frac{x dt}{t(1+tx^2)}$ calcul $\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -2x \ln(x)$ donc f est bien continue en 0 mais pas dérivable car le même calcul donne $\frac{f(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x)$

2. $xf(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1/x^2)}$ et $\left| \frac{1}{n(n+1/x^2)} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ donc CN sur $[1, +\infty[$ et me théorème de double limite donne

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 51 [sujet] 1. Fait en cours

2. Fait en cours (séparer les termes pairs et impairs dans $\eta(x)$)

3. Fait en cours

4. η est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ fait en cours puis $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \frac{1}{1 - e^{(x-1)\ln 2}} (\eta(1) + (x-1)\eta'(1) + o(x-1))$ donne le résultat en utilisant $\eta(1) = \ln 2$ (fait en cours, soit avec le développement asymptotique de H_n , soit à partir du DSE de $\ln(1+x)$ qui CU sur $[0, 1]$ grâce au CSSA)

5. Poser $v_n = u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2$, montrer que $\sum (v_{n+1} - v_n)$ CV (par DL) donc (v_n) CV vers un réel l . En séparant les termes pairs et impairs, on trouve $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = (\ln 2)H_n + u_n - u_{2n}$ et comme $u_n = \frac{(\ln n)^2}{2} + l + o(1)$, on obtient le résultat annoncé.

Exercice 52 [sujet] 1. $x > 1$

2. cours

3. $2^x(\zeta - 1) = \sum_{n \geq 2} \frac{2^x}{n^x}$ CN sur $[3, +\infty[$ car $\left| \frac{2^x}{n^x} \right| \leq \frac{1}{(n/2)^3}$ et le théorème de double limite donne $\zeta - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^x} =$

$e^{-x \ln 2}$ donc $\zeta - 1$ est intégrable sur $[2, +\infty[$. On termine par TITT avec $\int_2^{+\infty} \left| \frac{1}{n^x} \right| dt = \frac{1}{n^2 \ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 53 [sujet] 1. Si $x \notin \{0\} \cup \{-1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$ alors $\sum f_n(x)$ CV par CSSA (vérifié à partir d'un certain rang donc $D = \mathbb{R}^* \setminus \{-1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$). Si $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, on a, par CSSA, $\|R_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1}{1+na} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, si $[a, b] \subset \left] -\frac{1}{N}, -\frac{1}{N+1} \right]$ alors le CSSA est vérifié pour $n \geq N+1$ donc on a $\|R_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1}{1+nb}$ et si $[a, b] \subset]-\infty, -1[$, le CSSA donne $\|R_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1}{1+nb}$ donc CVU sur tout segment de D .

2. Sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\sum f'_n(x)$ vérifie le CSSA donc si $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\left\| \sum_{k=1+n}^{+\infty} f'_k(x) \right\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{n}{(1+na)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\sum f'_n$ CVU sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$.

3. Par CVU de $\sum f_n$ sur $[1, +\infty[$ (par CSSA et majoration du reste), on a $\lim_{+\infty} f = 1$ puis $f(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx} \underset{+\infty}{\sim}$

$$\frac{1}{x} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \text{ car } \left| f(x) - 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{nx} \right| \leq \frac{1}{x^2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 54 [sujet] 1. La série CV toujours par CSSA (vérifié à partir d'un certain rang mais qui dépend de x !). On a $f(x) - \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^2}{n(n^2 + x^2)}$ vérifie le CSSA dès $n = 1$ donc $|R_n(x)| \leq \frac{x^2}{(n+1)((n+1)^2 + x^2)} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc CU sur $\mathbb{R}$ puis $\lim_0 f = f(0)$

2. $f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \left(\frac{i}{x+in} - \frac{i}{x-in} \right)$ donc $f_n^{(k)} = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \left(\frac{(-1)^k i k!}{(x+in)^{k+1}} - \frac{(-1)^k i k!}{(x-in)^{k+1}} \right)$ ce qui donne la CN sur $\mathbb{R}$ de $\sum f_n^{(k)}$ par $|f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{(x^2 + n^2)^{k+1}} \leq \frac{k!}{n^{2(k+1)}}$ avec $k \geq 1$ (la CS pour $k = 0$ suffit et a déjà été prouvée).

Exercice 55 [sujet] 1. Si $|x| < 1$, alors $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nx^{2n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et si $|x| > 1$ alors $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-n}{x}$ donc DVG

2. $|f'_n(x)| \leq n \frac{(2n-1)a^{2n-2} + a^{4n-2}}{(1-a^{2n})^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ si $x \in [-a, a] \subset]-1, 1[$ donc $\sum f'_n$ CN sur tout segment de $] -1, 1[$; $f'(x) = \sum_{n \geq 1} n \frac{(2n-1)x^{2n-2} + x^{4n-2}}{(1-x^{2n})^2} \geq 0$.

Exercice 56 [sujet] 1. Par récurrence sur n en remarquant que si $u_n(t) \leq \frac{t^n}{n!}$ alors $u_n(t-t^2) \leq \frac{t^n(1-t)^n}{n!} \leq \frac{t^n}{n!}$

2. $\|u_n\|_\infty \leq \frac{1}{n!}$ donc $\sum u_n$ CN sur $[0, 1]$ vers i telle que (intégration sur un segment avec CN) $u(x) = \int_0^x u(t-t^2) dt$; comme $t \mapsto u(t-t^2)$ est continue, u est $\mathcal{C}^1$ et $u'(t) = u(t-t^2)$.

Exercice 57 [sujet] 1. f_n est continue par récurrence

2. Par récurrence sur n : f_n est $\mathcal{C}^n$, $f_n^{(k)}(a) = 0$ si $k \leq n-1$ et $f_n^{(n)} = f$. Avec Taylor, on en déduit $f_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt$

3. $\|f_n\|_{\infty, [a, x]} \leq \|f\|_{\infty, [a, x]} \frac{(x-a)^n}{n!}$ donc CN sur le segment $[a, x]$ (ou $[x, a]$) et $g(x) = \int_a^x f(t) \sum_{n \geq 1} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \int_a^x f(t) e^{x-t} dt$

4. $g(x) = e^x \int_a^x f(t) e^{-t} dt$ est donc $\mathcal{C}^1$ et solution de $y'(x) - y(x) = f(x)$

Exercice 58 [sujet] On pose $f_n(t) = \frac{ne^{-t} + t^2}{n+t}$; (f_n) CS sur $[0, 1]$ vers $f : t \mapsto e^{-t}$ et $|f_n(t) - e^{-t}| \leq \frac{1+e^{-1}}{n}$ donc (f_n) CU sur $[0, 1]$ vers f ; par intégration $\lim u_n = \int_0^1 e^{-t} dt = 1 - e^{-1}$.

Exercice 59 [sujet] 1. On a $P_n^{(k)}(0) = 0$ si $k < n$ ou $k > 2n$ et, si $k \in \llbracket n, 2n \rrbracket$, par la formule de Leibniz, $P_n^{(k)}(0) = \binom{k}{n} n(n-1) \dots (2n-k+1) b p^{k-n} (-a)^{2n-k}$ est entier. Puis $P_n(r-X) = P_n(X)$ donne les dérivées en r par symétrie.

2. $u_n = q \int_0^r P_n(t) e^t dt$ est un entier par IPP successives avec la question précédente et le fait que $qe^r \in \mathbb{Z}$. On a $\|P_n \exp\|_\infty \leq \frac{1}{n!} r^n (br)^n e^r$ donc $(P_n \exp)$ CU sur $[0, r]$ vers 0 et par intégration (u_n) tend vers 0. Or (u_n) est une suite d'entiers, elle est donc nulle à partir d'un certain rang et comme $P_n \exp$ est continue et positive sur $[0, r]$, on en déduit $P_n \exp = 0$ sur $[0, r]$ ce qui est absurde. On vient donc de prouver par l'absurde que si $r \in \mathbb{Q}$ alors e^r est irrationnel donc en particulier (avec $r = 1$), e est irrationnel.

Exercice 60 [sujet] 1. Par récurrence : si f_n est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ alors $t \mapsto \sqrt{f_n(t)^2 + t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc f_{n+1} est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

2. $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \int_0^x (f_n(t) - f_{n-1}(t)) \frac{f_n(t) + f_{n-1}(t)}{\sqrt{t^2 + f_n(t)^2} + \sqrt{t^2 + f_{n-1}(t)^2}} dt$ donne le résultat par récurrence sur n car $\left| \frac{f_n(t) + f_{n-1}(t)}{\sqrt{t^2 + f_n(t)^2} + \sqrt{t^2 + f_{n-1}(t)^2}} \right| \leq 1$.

On en déduit $\|f_{n+1} - f_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$ donc $\sum (f_{n+1} - f_n)$ CN sur tout segment de $\mathbb{R}$ ce qui donne la CS de (f_n) et la continuité de $f = \sum_{n \geq 1} (f_{n+1} - f_n)$ par télescopage.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on vérifie la CU de (g_n) sur $[0, x]$ (ou $[x, 0]$) avec $g_n(t) = \sqrt{t^2 + f_n(t)^2}$ car $|g_n(t) - \sqrt{t^2 + f(t)^2}| = |f_n(t) - f(t)| \frac{f_n(t) + f(t)}{\sqrt{t^2 + f_n(t)^2} + \sqrt{t^2 + f(t)^2}} \leq \|f_n - f\|_{\infty, [0, x]}$ donc par intégration, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + f(t)^2} dt$ puis $f(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + f(t)^2} dt$ ce qui prouve que f est $\mathcal{C}^1$ par continuité de f et, en dérivant, $f'(x) = \sqrt{x^2 + f(x)^2}$.

Exercice 61 [sujet] 1. $\|u_n\| \leq |\alpha_n|$ donc CVN sur $[0, 1]$

2. Par CVN, $\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n \geq 1} \int_0^1 u_n(t) dt = \sum_{n \geq 1} \alpha_n \frac{\sin(2\pi\omega_n)}{2\pi\omega_n}$

3. f est $\mathcal{C}^0$ sur $[0, 1]$ donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\frac{k}{N}\right) = \int_0^1 f(t) dt$ (somme de Riemann).

Exercice 62 [sujet] 1. $t^{xt^y} = e^{xt^y \ln(t)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ car $y > 0$.

2. $\|f_n\|_{\infty} = \frac{1}{n!} \left(\frac{|x|}{ey}\right)^n$

3. Les f_n sont continues sur $[0, 1]$ donc on peut intervertir $\sum / \int$ sur le segment $[0, 1]$ par CN : $\sum_{n \geq 0} f_n(t) = t^{xt^y}$ par

DSE de exp et $\int_0^1 f_n(t) dt \stackrel{n\text{IPP}}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$

Exercice 63 [sujet] 1. Si $x \in [-a, a]$ alors pour $n \geq a$, on a $(x+n)^2 \geq (a+n)^2$ et $(x-n)^2 \geq (n-a)^2$ donc $\|f_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq \frac{C}{(n+a)^2} + \frac{C}{(n-a)^2}$ donc CVNTS de $\mathbb{R}$.

2. Les deux séries CV donc, avec des changements d'indices, $f(x+1) = \varphi(x+1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \varphi(x+k) + \sum_{h=0}^{+\infty} \varphi(x-h) = f(x)$

3. g est continue sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique donc bornée et $|\varphi(x)g(x)| \leq \frac{C\|g\|_{\infty}}{1+x^2}$, intégrable sur $\mathbb{R}$.

$\|f_n g\|_{\infty, [0, 1]} \leq \|g\|_{\infty} \|f_n\|_{\infty, [0, 1]}$ donc la série CVN sur $[0, 1]$ et on a $\int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 \varphi(x)g(x) dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \varphi(x+n)g(x) dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \varphi(x-n)g(x) dx$. Par changements de variables et avec la 1-périodicité de g , on a $\int_0^1 \varphi(x+n)g(x) dx = \int_n^{n+1} \varphi(u)g(u) du$ et $\int_0^1 \varphi(x-n)g(x) dx = \int_{-n}^{-n+1} \varphi(u)g(u) du$ ce qui donne, avec Chasles, $\int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)g(x) dx$.

Exercice 64 [sujet] Proche des intégrales de Wallis

1. CSSA avec $0 \leq a_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n}$

2. $a_{n+2} \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{2}{3}(n+1) \int_0^1 t^n (1-t^2)^{3/2} dt = \frac{2}{3}(n+1)(a_n - a_{n+2})$

3. On prouve $\sum_{n \geq 0} a_n = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t} dt$ en utilisant le TCD appliqué à $S_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sqrt{1-t^2} t^k$ car le TITT est plus

difficile à appliquer (la CVA de $\sum a_n$ n'est pas évidente) : on a $|S_n(t)| = \sqrt{1-t^2} \left| \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t} \right| \leq \frac{2\sqrt{1-t^2}}{1+t}$ ce qui permettra de conclure

Exercice 65 [sujet] Si $x > 0$, on a $\frac{x}{\text{ch}(x)} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x e^{-(2n+1)x}$ puis TITT avec $\int_0^{+\infty} |x e^{-(2n+1)x}| dx = \frac{1}{(2n+1)^2}$

Exercice 66 [sujet] 1. $n^{-n} \leq \frac{1}{n^2}$ si $n \geq 2$ et $\lim_0 e^{x \ln(x)} = 1$

2. IPP successives $\int_0^1 f_{n,p}(t) dt = (-1)^n \frac{n!}{(p+1)^n}$

3. TITT avec $e^{x \ln(x)} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n (\ln x)^n}{n!}$

Exercice 67 [sujet] $t^{t^x} = \sum_{n \geq 0} \frac{(t^x \ln t)^n}{n!}$ et on applique le TITT avec $\int_0^1 \frac{|t^x \ln t|^n}{n!} dt = (-1)^n \int_0^1 \frac{(t^x \ln t)^n}{n!} dt \stackrel{\text{IPP}}{=} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n-1)!(xn+1)} \int_0^1 t^{xn} (\ln t)^{n-1} dt = \dots = \frac{1}{(xn+1)^{n+1}}$

Exercice 68 [sujet] Par TCD avec $S_n(t) = \sum_{k=0}^n t^{b-1} (-1)^k t^{ka}$ et $|S_n(t)| = t^{b-1} \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{(n+1)a}}{1 + t^a} \leq \frac{2t^{b-1}}{1 + t^a}$

Exercice 69 [sujet] $\int_0^1 x^{2n} (1-x) dx = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ et par TITT la somme de la série vaut aussi $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2)$.

Exercice 70 [sujet] $\frac{t^{\alpha-1}}{1+t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-\alpha}}$ puis $\frac{t^{\alpha-1}}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{\alpha+n-1}$ si $t \in]0, x]$ et on applique le TITT ($x < 1$ fixé) avec $\int_0^x |(-1)^n t^{\alpha+n-1}| dt = \frac{x^{\alpha+n}}{\alpha+n}$. La dernière somme s'obtient avec $\alpha = \frac{1}{3}$ et $x = \frac{1}{2}$ (poser $u = t^{1/3}$ pour calculer l'intégrale)

Exercice 71 [sujet] 1. $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

2. $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{t} e^{-nt}$ puis TITT (chgt de variable pour le calcul des intégrales)

Exercice 72 [sujet] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = 0$ et $\frac{x^2}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc J existe. Pour $x > 0$, $\frac{x^2}{e^x - 1} = \sum_{n \geq 1} x^2 e^{-nx}$ puis on applique le TITT avec $f_n(x) = x^2 e^{-nx} \geq 0$ et $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \frac{2}{n^3}$ par deux IPP.

Exercice 73 [sujet] 1. $\frac{x}{\text{sh } x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ et $\frac{x}{\text{sh } x} \underset{+\infty}{\sim} 2xe^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

2. $\frac{x}{\text{sh } x} = \frac{2xe^{-x}}{1 - e^{-2x}} \underset{x \geq 0}{=} 2 \sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-(2n+1)x}$ puis TITT (H4) $\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{2}{(2n+1)^2}$

Exercice 74 [sujet] Si $t > 0$, $\frac{\sin t}{\text{sh } t} = \sum_{n \geq 0} 2 \sin(t) e^{-(2n+1)t}$ puis TITT avec $\int_0^{+\infty} |\sin(t) e^{-(2n+1)t}| dt \leq \int_0^{+\infty} te^{-(2n+1)t} dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{1}{(2n+1)^2}$

Exercice 75 [sujet] 1. $\frac{\ln(1-t^2) \ln(t)}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\ln(t)$ et $\frac{\ln(1-t^2) \ln(t)}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 1} 0$ donc I existe.

2. On applique le TITT avec $\frac{\ln(1-t^2) \ln(t)}{t^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n-2} \ln(t)}{n}$ pour $t \in]0, 1[$ et $\int_0^1 t^{2n-2} \ln(t) dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Pour le calcul, comme $\frac{1}{n(2n-1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n-1} + \frac{2}{(2n-1)^2}$, on trouve $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(2k-1)^2} = 2H_n - 2H_{2n} + 2\left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{4} - 2\ln(2)$ en utilisant $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 76 [sujet] 1. On vérifie $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum a_n$ CV, (b_n) CV vers l donc $n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda = e^l > 0$.

2. a) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - (1-t)^x}{t} = x$ et $\frac{1 - (1-t)^x}{t} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{-1}{(1-t)^{-x}}$

b) Pour $t \in]0, 1[$, $(1-t)^x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} t^n$ donc $\frac{1-(1-t)^x}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} t^{n-1}$
 puis on applique le TITT avec $u_n = \int_0^1 |f_n(t)| dt = \frac{(-x)(1-x)\dots(n-x-1)}{n \times n!}$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{x+2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $u_n \sim \frac{\lambda}{n^{x+2}}$ et $x+2 > 1$.

Exercice 77 [sujet] 1. $\frac{\sin \alpha x}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{e^x - 1} = \alpha$

2. $\frac{\sin \alpha x}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \alpha x e^{-nx}$ si $x > 0$ puis TITT avec $\int_0^{+\infty} |\sin \alpha x e^{-nx}| dx \leq \int_0^{+\infty} |\alpha| x e^{-nx} dx = \frac{|\alpha|}{n^2}$ et enfin on calcule $\int_0^{+\infty} \sin \alpha x e^{-nx} dx = \text{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(n-i\alpha)x} dx \right) = \frac{\alpha}{n^2 + \alpha^2}$

3. Par comparaison à une intégrale I équivaut à $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha dt}{\alpha^2 + t^2}$ quand α tend vers $+\infty$ puis $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha) = \frac{\pi}{2}$

Exercice 78 [sujet] 1. $|f_n(x)| \leq |a_n| \frac{b^n}{n!} e^{-a} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(|a_n|)$ donc CN sur tout segment de $\mathbb{R}^+$

2. Par TITT avec $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt \stackrel{\text{IPP}}{=} |a_n|$, on trouve $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Exercice 79 [sujet] 1. $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ et $o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$

2. Le TITT ne s'applique pas car la série à trouver n'est pas ACV. $f(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \cos(t) e^{-(k+1)t}$ puis

$$\int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-(k+1)t} dt = \frac{(k+1)}{1 + (k+1)^2} \text{ et on termine avec le TCD : } |S_n(t)| = \left| \frac{\cos(t)(1 - (-1)^{n+1} e^{-(n+1)t})}{1 + e^t} \right| \leq \frac{2|\cos(t)|}{1 + e^t}$$

Exercice 80 [sujet] 1. CV par CSSA mais pas ACV car $\frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$

2. On applique le TCD à $S_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-(2k+1)t} \cos(xt) = e^{-t} \frac{1 - (-1)^{n+1} e^{-(2n+2)t}}{1 + e^{-2t}} \cos(xt)$ donc $|S_n(t)| \leq \frac{2e^{-t}}{1 + e^{-2t}}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On termine avec $\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos(xt) dt = \frac{2k+1}{(2k+1)^2 + x^2}$.

Exercice 81 [sujet] $\sum_{k=0}^n u_k = \int_0^{\pi/2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \cos^k(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos t}$ par TCD en utilisant la majoration

$$|S_n(t)| = \left| \frac{1 - (-1)^{n+1} \cos(n+1)t}{1 + \cos t} \right| \leq \frac{2}{1 + \cos t}. \text{ On trouve } S = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{2 \cos^2 t/2} = \left[\tan \frac{t}{2} \right]_0^{\pi/2} = 1$$

Exercice 82 [sujet] 1. $\frac{(\ln t)^2}{1+t^2} \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc l'intégrale de gauche CV et vaut celle de droite par $u = \frac{1}{t}$.

2. Si $t \in]0, 1[$ alors $\frac{(\ln t)^2}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (\ln t)^2 t^{2n}$ puis TITT avec $\int_0^1 |(-1)^n (\ln t)^2 t^{2n}| dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{2}{(2n+1)^3}$

Exercice 83 [sujet] 1. $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$ donc CN sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$

2. Par CSSA $|f(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ donc (avec la continuité précédente), f est intégrable sur $\mathbb{R}$. On applique le TCD

$$\text{à } R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + t^2} : \text{ par CSSA, on a } |R_n(t)| \leq \frac{1}{(n+1)^2 + x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} R_n(t) dt = 0 \text{ ce}$$

qui donne par linéarité de l'intégrale sur la somme partielle de la série (donc une somme finie) $\int_{\mathbb{R}} f(t) dt =$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{n^2 + x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$$

Exercice 84 [sujet] 1. $F(t) = \frac{\sin(\pi t)}{1-t}$; pas de CU car $R_n(t) = \frac{t^{n+1} \sin(\pi t)}{1-t}$ donc $R_n(1-1/n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi e^{-1}$ donc $(\|R_n\|_\infty)$ ne tend pas vers 0

2. TITT avec $\int_0^1 |f_n(t)| dt = \int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt \stackrel{2 \text{ IPP}}{\leq} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(2 + \int_0^1 t^{n+2} \sin(\pi t) dt \right) \leq \frac{3}{(n+1)(n+2)}$; on en déduit $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{1-t} \frac{x=\pi(1-t)}{dt} t = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Exercice 85 [sujet] 1. $0 \leq u_n \leq \pi \int_0^\pi x^n (1-x) dx = \pi \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$

2. Par TITT avec $\int_0^\pi |x^n \sin(\pi x)| dx \leq \pi \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ puis changement de variable $u = \pi x$.

Exercice 86 [sujet] $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt \stackrel{\text{TITT}}{=} \sum_{n \geq 0} \int_0^1 -t^n \ln(t) dt = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Exercice 87 [sujet] — Si I CV alors $\sum_{k=0}^n u_k \stackrel{\text{somme finie}}{=} \int_0^1 f(t) \frac{1-t^{n+1}}{1-t} dt$ et comme $f \geq 0$, $f(t) \frac{1-t^{n+1}}{1-t} \leq \frac{f(t)}{1-t}$

donc $\sum_{k=0}^n u_k \leq I$ donc la série CV (SATP dont les somme partielles sont majorées)

— Si $\sum u_n$ CV alors $\int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} f(t) t^n dt$ que l'on peut intégrer terme à terme sur le segment $[0, x]$ si

$|x| < 1$ par CVN car $|f(t) t^n| \leq \|f\|_\infty x^n$. On a donc $\int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x f(t) t^n dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (car $f \geq 0$) donc I

CV (intégrale d'une fonction positive dont une primitive est majorée)

En cas de CV, on a $I = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ par TITT (et H4 est la CV de $\sum u_n$ car $f \geq 0$).