Réduction des endomorphismes

La notation $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des nombres réels, soit le corps des nombres complexes.

I Éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice carrée

1. Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme

Définition : Soient E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. On dit que λ est une **valeur propre** de u s'il existe un vecteur x de E non nul tel que $u(x) = \lambda x$.
Le **spectre** de u, noté $\mathrm{Sp}(u)$, est l'ensemble des valeurs propres de u.

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, u(x) = \lambda x$$

2. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on note $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda id_E)$ **l'espace propre de u associé à la valeur propre** λ. Un vecteur non nul de $E_\lambda(u)$ est appelé **vecteur propre de u associé à la valeur propre** λ.

$$\left.\begin{array}{c} x \text{ est un vecteur propre} \\ \text{de } u \end{array}\right\} \text{ si et seulement si } \left\{\begin{array}{c} \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ \text{et} \\ \exists \lambda \in \mathbb{K}, u(x) = \lambda x \end{array}\right.$$

Exemple(s) :

(I.1) Si p est le projecteur sur F parallèlement à G (avec F et G différents de $\{0\}$), on a $\mathrm{Sp}(p) = \{0, 1\}$, $E_0(p) = G$ et $E_1(p) = F$.

(I.2) Si $d : f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mapsto f' \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors $\mathrm{Sp}(d) = \mathbb{R}$ et $E_\lambda(d) = \mathrm{Vect}\left\{x \mapsto e^{\lambda x}\right\}$.

(I.3) Si $\varphi : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto XP \in \mathbb{K}[X]$, alors $\mathrm{Sp}(\varphi) = \emptyset$.

Propriété [I.1] : Soit u un endomorphisme de E et D un sous-espace vectoriel de E. Alors D est une droite stable par u si et seulement si il existe un vecteur propre e de u tel que $D = \mathrm{Vect}\{e\}$.

Remarque(s) :

(I.4) Déterminer les droites stables par u est donc équivalent à déterminer les vecteurs propres de u.

Propriété [I.2] : Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres 2 à 2 distinctes de u alors $E_{\lambda_1}(u), \ldots, E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe.

2. Si $x_1, \ldots, x_p$ sont des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes alors $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille libre.

Exemple(s) :

(I.5) Les fonctions $f_k : t \mapsto e^{z_k t}$, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, forment une famille libre si $z_0, \ldots, z_n$ sont des complexes deux à deux distincts.

Propriété [I.3] : Si u et v sont deux endomorphismes de E qui commutent (ie $u \circ v = v \circ u$) alors

les espaces propres de u sont stables par v.

Remarque(s) :

(I.6) Si u et v commutent et x est un vecteur propre de u alors $v(x)$ est aussi un vecteur propre de u seulement si $v(x) \neq 0$.

(I.7) La réciproque est fausse ; c/ex : les espaces propres de $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont stables par $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ mais $UV \neq VU$.

2. Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée

Définition : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les **valeurs propres**, le **spectre** de A (noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$) et les **vecteurs propres** et les espaces propres de A (notés $E_\lambda(A)$) sont ceux de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A.

1. $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{K}$ et $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \mathbf{X} \neq \mathbf{0}, AX = \lambda X$
2. $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$
3. $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est vecteur propre de A si et seulement si $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}, AX = \lambda X$.

Propriété [I.4] : Soit A une matrice **réelle** $n \times n$ (alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$). On a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.
De plus,

$$\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \quad \text{et} \quad \dim E_\lambda(A) = \dim E_{\overline{\lambda}}(A)$$

Remarque(s) :

(I.8) On a même un résultat plus précis : si $(X_1, \ldots, X_p)$ est une base de $E_\lambda(A)$ alors $(\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_p})$ est une base de $E_{\overline{\lambda}}(A)$; il est donc inutile d'étudier les 2 sous-espaces propres.

Exemple(s) :

(I.9) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier $A^3 = I_3$, en déduire $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ puis une base des différents espaces propres de A.

Propriété [I.5] : Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblables (ie il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$).

Alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(B)$ et pour $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, on a $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(B)$.

Conséquence [I.6] : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, on a $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$.

3. Polynôme caractéristique

Définition :

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Le **polynôme caractéristique** de u est le polynôme $\mathcal{X}_u$ associé à la fonction polynômiale $\lambda \in \mathbb{K} \mapsto \det(\lambda id_E - u)$.
2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le **polynôme caractéristique** de A est le polynôme $\mathcal{X}_A$ défini par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \mathcal{X}_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

Remarque(s) :

(I.10) Si $\mathcal{B}$ est une base de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ alors $\mathcal{X}_u = \mathcal{X}_A$.

(I.11) Inversement $\mathcal{X}_A$ est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Exemple(s) :

(I.12) Si p est un projecteur de E, espace vectoriel de dimension n, alors $\mathcal{X}_p = X^{n-\mathrm{Tr}(p)}(X-1)^{\mathrm{Tr}(p)}$.

(I.13) Déterminer le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Propriété [I.7] :

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \Leftrightarrow (u - \lambda id_E) \notin \mathcal{GL}(E) \Leftrightarrow \mathcal{X}_u(\lambda) = 0$$

Les valeurs propres de u sont exactement les racines de $\mathcal{X}_u$ (dans $\mathbb{K}$)

2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors

$$\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \Leftrightarrow (A - \lambda I_n) \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \mathcal{X}_A(\lambda) = 0$$

Le spectre de A (sur $\mathbb{K}$) est exactement l'ensemble des racines de $\mathcal{X}_A$ (dans $\mathbb{K}$)

Exemple(s) :

(I.14) Montrer que $u = P \mapsto X(X-1)P' - nXP$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer ses éléments propres.

Propriété [I.8] :

1. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\deg(\mathcal{X}_A) = n$ et

$$\mathcal{X}_A = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

2. Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\deg(\mathcal{X}_u) = n$ et

$$\mathcal{X}_u = X^n - \mathrm{Tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)$$

Remarque(s) :

(I.15) Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ alors $\mathcal{X}_A = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$.

Conséquence [I.9] :

1. Si u est un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie n, alors u admet au plus n valeurs propres distinctes.

2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors A admet au plus n valeurs propres complexes distinctes.

Exemple(s) :

(I.16) Toute matrice de $M_n(\mathbb{K})$ admet au moins une valeur propre complexe.

(I.17) Toute matrice réelle de taille impaire admet au moins une valeur propre réelle.
Ce résultat est faux pour une matrice de taille paire.

(I.18) Tout endomorphisme d'un espace vectoriel complexe et de dimension finie admet au moins une valeur propre.
Ce résultat est faux pour un espace réel ou pour un espace complexe de dimension infinie.

(I.19) Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, calculer les produits $\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & -I_p \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & -A \\ 0 & \lambda I_p \end{pmatrix}$. Que peut-on en déduire sur les polynômes caractéristiques de AB et BA ?

Définition :

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On appelle **ordre de multiplicité de la valeur propre** λ l'ordre de multiplicité de la racine λ de $\mathcal{X}_u$; on la note $m_\lambda(u)$.
$$\mathcal{X}_u = (X-\lambda)^{m_\lambda(u)} \times Q \quad \text{avec } Q(\lambda) \neq 0$$
2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$. On appelle **ordre de multiplicité de la valeur propre** λ l'ordre de multiplicité de la racine λ de $\mathcal{X}_A$; on la note $m_\lambda(A)$.

Remarque(s) :

(I.20) On peut aussi caractériser la multiplicité d'une racine à l'aide des dérivées
$$\forall k \in [\![0, m_\lambda(u)-1]\!], \mathcal{X}_u^{(k)}(\lambda) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{X}_u^{(m_\lambda(u))}(\lambda) \neq 0$$
λ est donc une valeur propre multiple de u si et seulement si $\mathcal{X}_u(\lambda) = \mathcal{X}_u'(\lambda) = 0$.

Propriété [I.10] :

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $\mathcal{X}_u$ est scindé sur $\mathbb{K}$ (donc en particulier si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) alors
$$n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m_\lambda(u) \quad , \quad \mathrm{Tr}(u) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda \times m_\lambda(u) \quad \text{et} \quad \det(u) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda^{m_\lambda(u)}$$
2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors
$$n = \sum_{\lambda \in \boldsymbol{\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)}} m_\lambda(A) \quad , \quad \mathrm{Tr}(A) = \sum_{\lambda \in \boldsymbol{\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)}} \lambda \times m_\lambda(A) \quad \text{et} \quad \det(A) = \prod_{\lambda \in \boldsymbol{\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)}} \lambda^{m_\lambda(A)}$$

Remarque(s) :

(I.21) Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé sur $\mathbb{K}$ s'il peut se factoriser en $P = a\displaystyle\prod_{i=1}^{d}(X-\alpha_i)$ avec les α_i dans $\mathbb{K}$ (pas forcément distincts).
Tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$ et un polynôme réel est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il ne possède que des racines réelles (ie pas de racines complexes non réelles).

Propriété [I.11] :

1. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique donc les mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité.
$$\text{Si } A = PBP^{-1} \text{ avec } P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ alors } \mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B \text{ donc } \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(B)$$
2. Pour toute matrice A, les matrices A et ${}^tA$ ont le même polynôme caractéristique donc les mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité.
$$\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_{A^T} \text{ donc } \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A^T)$$

Remarque(s) :

(I.22) Si A et B sont semblables et $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(B)$ alors on a vu aussi que $\dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_\lambda(B))$ mais les deux espaces propres ne sont pas égaux : deux matrices semblables n'ont pas les mêmes vecteurs propres !

(I.23) Les espaces propres de A et A^T sont aussi de même dimension mais ils ne sont pas égaux : les vecteurs propres de A et A^T ne sont pas les mêmes !

Propriété [**I.12**] **:** Soient E un espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et F un sous-espace de E stable par u. On note u_F l'endomorphisme de F induit par u ; on a alors :

$$\mathcal{X}_{u_F} \text{ divise } \mathcal{X}_u$$

On en déduit en particulier

$$\mathrm{Sp}(u_F) \subset \mathrm{Sp}(u) \quad \text{et} \quad m_\lambda(u_F) \leqslant m_\lambda(u) \text{ si } \lambda \in \mathrm{Sp}(u_F)$$

Conséquence [**I.13**] **:**

1. Soient E un espace de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On a

$$\boldsymbol{1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m_\lambda(u)}$$

2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, on a

$$\boldsymbol{1 \leqslant \dim E_\lambda(A) \leqslant m_\lambda(A)}$$

Remarque(s) :

(I.24) Si $\dim(E) = n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ possède n valeurs propres distinctes ($\mathcal{X}_u$ scindé à racines simples) alors $\dim E_\lambda(u) = 1$ et $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.

Exemple(s) :

(I.25) Déterminer les éléments propres de $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $a_{i,j} = \begin{cases} a & \text{si } i = j \\ b & \text{sinon} \end{cases}$

II Réduction des endomorphismes en dimension finie

1. Diagonalisation

Définition :

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **diagonalisable** si

il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice diagonale.

2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est **diagonalisable dans** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si A est semblable à une matrice diagonale, ie

il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$

Remarque(s) :

(II.1) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$ (ie $\mathcal{X}_A$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$) alors A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété [**II.1**] **:** Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. u est diagonalisable.

ii. Il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

iii. $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$

iv. $\boldsymbol{\dim(E) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u))}$.

Exemple(s) :

(II.2) Soient E un espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable possédant n valeurs propres distinctes et $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que v est diagonalisable.
En déduire $u \circ v = v \circ u$ si et seulement si il existe $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $v = P(u)$.

(II.3) Soient E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable tel que $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$. Si $p_1, \dots, p_r$ sont les projecteurs associée à $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$ alors $u^k = \lambda_1^k p_1 + \cdots + \lambda_r^k p_r$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Propriété [II.2] : Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. Alors A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si f est diagonalisable.

Conséquence [II.3] : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a équivalence de :

i. A est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)

ii. Il existe une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de A.

iii. $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} E_\lambda(A)$.

iv. $n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \dim(E_\lambda(A))$.

Exemple(s) :

(II.4) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

Propriété [II.4] : Si $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ et P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à une base de vecteurs propres de A (ie la $j^{\text{ème}}$ colonne de P est un vecteur propre de A associé à λ_j).

Théorème [II.5] :

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable **si et seulement si**

$$\boxed{\mathcal{X}_u \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \quad \underline{\text{et}} \quad \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda(u)}$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est diagonalisable **si et seulement si**

$$\boxed{\mathcal{X}_A \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \quad \underline{\text{et}} \quad \forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A), \dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda(A)}$$

Exemple(s) :

(II.5) Si $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, mais l'est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Conséquence [II.6] :

1. Si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n tel que $\mathcal{X}_u$ possède n racines distinctes dans $\mathbb{K}$ alors u est diagonalisable.
2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est telle que $\mathcal{X}_A$ possède n racines distinctes dans $\mathbb{K}$ alors A est diagonalisable.

Attention : Ce n'est qu'une condition suffisante de diagonalisabilité : id_E est diagonalisable mais son polynôme caractéristique n'est pas à racines simples.

Exemple(s) :

(II.6) Pour $a \in \mathbb{C}$, $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & -1 \\ 2a+2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

(II.7) Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer une CNS sur α pour que A soit diagonalisable.

2. Polynôme annulateur

Propriété [II.7] : Soient E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ alors $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}(P(u))$.

Remarque(s) :

(II.8) On verra la réciproque plus tard (mais ce n'est pas un résultat du cours à priori).

Propriété [II.8] : Soient E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de u. Alors on a $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), P(\lambda) = 0$ ie $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ divise P. Cela signifie que

si λ est une valeur propre de u alors λ est une racine de P

Attention : Les valeurs propres de u sont parmi les racines de tout polynôme annulateur de u.

Exemple(s) :

(II.9) Si s est une symétrie alors $\mathrm{Sp}(s) \subset \{-1, +1\}$ et si $s \neq \pm id_E$ alors $\mathrm{Sp}(s) = \{-1, +1\}$.

(II.10) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors il existe un polynôme annulateur P de A tel que $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ ie un polynôme annulateur dont les racines sont exactement les valeurs propres complexes de A.

(II.11) Si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable et nilpotente alors $N = 0$.

Théorème [II.9] :

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable **si et seulement si**

   il existe UN polynôme annulateur de u scindé à racines simples (dans $\mathbb{K}$)

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) **si et seulement si**

   il existe UN polynôme annulateur de A scindé à racines simples (dans $\mathbb{K}$)

Exemple(s) :

(II.12) Tout projecteur et toute symétrie d'un espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable.

Conséquence [II.10] :

1. Soit u un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie. Alors u est diagonalisable si et seulement si le polynôme $P = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda) = \prod_{1 \leqslant k \leqslant r} (X - \lambda_k)$ est annulateur de u, avec $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, les λ_i étant deux à deux distincts.
2. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $P = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} (X - \lambda) = \prod_{1 \leqslant k \leqslant r} (X - \lambda_k)$ est annulateur de A, avec $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, les λ_i étant deux à deux distincts.

Remarque(s) :

(II.13) Si u est diagonalisable et si $(L_\lambda)_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)}$ sont les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points de $\mathrm{Sp}(u)$ alors $(L_\lambda(u))_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)}$ est la famille des projecteurs associés à $E = \bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ (appelée famille des projecteurs spectraux) et on a $\sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)} \lambda^k L_\lambda(u) = u^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Conséquence [II.11] : Si u est un endomorphisme diagonalisable de E, espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace de E stable par u, alors l'endomorphisme induit par u sur F est diagonalisable.

Exemple(s) :

(II.14) Soient E un espace vetoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et F un sous-espace de E. Montrer que F est stable par u si et seulement si il existe $e_1, \ldots, e_k$, des vecteurs propres de u, tels que $F = \mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_k\}$.
Cette équivalence est fausse si u n'est pas diagonalisable.

(II.15) Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E, espace vectoriel de dimension finie, qui commutent ($u \circ v = v \circ u$). Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que les deux matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ soient diagonales.
On dit que u et v sont co-diagonalisables.

Théorème [II.12] : (Théorème de Cayley-Hamilton)

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme $\mathcal{X}_u$ est annulateur de u, ie $\mathcal{X}_u(u) = 0$.
2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathcal{X}_A(A) = 0$.

Remarque(s) :

(II.16) Les intérêts du théorème de Cayley-Hamilton sont les suivants : il fournit un polynôme annulateur de A de degré n (donc il existe un polynôme annulateur non nul de degré $\leqslant n$) et dont les racines sont exactement les valeurs propres de A.

(II.17) Lorsqu'on a besoin d'un polynôme annulateur de A dont les racines sont exactement les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ (distinctes) de A.

— Si on sait que A est diagonalisable, on prend $P = \prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)$ qui est scindé à racines simples.
— Sinon, on prend $\mathcal{X}_A$ qui ne sera peut être pas scindé (dans $\mathbb{R}$) et qui n'est à priori pas à racines simples.

Exemple(s) :

(II.18) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.

(II.19) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que : $P(A) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \forall\lambda \in \mathrm{Sp}(A), P(\lambda) \neq 0$.

(II.20) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

(II.21) Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AP = PB$ si et seulement si A et B ont une valeur propre commune.

(II.22) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors on a les équivalences : A est nilpotente si et seulement si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$ si et seulement si $\mathcal{X}_A = X^n$.
Ce résultat est faux si on se limite au spectre réel.

3. Trigonalisation

Définition :

1. Soit u un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie. On dit que u est **trigonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire (supérieure).
2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est **trigonalisable** (dans $\mathbb{K}$) s'il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire (supérieure)

Remarque(s) :

(II.23) $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement si il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_i\}$ est stable par u.

Théorème [II.13] :

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors

   u est trigonalisable **si et seulement si** $\mathcal{X}_u$ est scindé (sur $\mathbb{K}$).

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

   A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **si et seulement si** $\mathcal{X}_A$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

Remarque(s) :

(II.24) Toute matrice est donc trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

(II.25) Tout endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension finie est trigonalisable.

Conséquence [II.14] : Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Si u est trigonalisable alors l'endomorphisme induit par u sur F est trigonalisable.

Exemple(s) :

(II.26) Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 18 \\ -6 & -7 & -9 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(II.27) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres complexes de A (comptées avec multiplicité). Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les valeurs propres complexes de A^k sont $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$. Plus généralement, celles de $P(A)$ sont $P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)$ (si $P \in \mathbb{K}[X]$).

(II.28) Étude des matrices de rang 2 : pour $n \geqslant 3$, on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de coefficients $\cos\left(\dfrac{(i+j)\pi}{n}\right)$. Étudier sa diagonalisabilité.

(II.29) Application aux suites récurrentes linéaires : pour étudier la suite définie par $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ et on étudie (X_n) définie par $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$.
Ceci peut se généraliser à toute suite récurrente linéaire, ie du type $u_{n+p+1} = \alpha_p u_{n+p} + \dots + \alpha_0 u_n$ pour tout $n \geqslant 0$ en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p} \end{pmatrix}$ avec $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ et $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geqslant j = i-1 \geqslant 2 \\ \alpha_{j+1} & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$