

Exercice 1 (CCINP PSI 2022)

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3 + x^2}$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (CCINP PSI 2022)

$$\text{Soient } u_n(x) = \frac{\ln(1 + n^2 x^2)}{n^2 \ln(1 + n)} \text{ et } S(x) = \sum_{n \geq 1} u_n(x).$$

1. Trouver le domaine de définition D de S .
2. Montrer que S est continue sur D .
3. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que $\sum u'_n(x)$ converge uniformément sur D .
4. Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur D .

Exercice 3 (Mines-Télécom PSI 2021)

$$\text{Soit } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n [\sqrt{n+x} - \sqrt{n}] \text{ pour } x \geq 0.$$

1. Montrer que f est bien définie
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$; étudier ses variations.
3. Montrer que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

indication : raisonner par l'absurde en tenant compte de la monotonie et commencer par vérifier que $f(x) \geq S_{2n+1}(x)$ avant de séparer les termes pairs/impairs.

Exercice 4 (Mines-Ponts PSI 2018)

$$1. \text{ Déterminer le domaine de définition de } f(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{x e^{-nx}}{\ln n}$$

2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
3. f est-elle dérivable en 0? Continue en 0?
indication : pour la dérivabilité, on peut soit étudier le taux d'accroissement, soit la limite de f' selon ce qui paraît le plus simple. Pour la continuité en 0, prouver la CVU.

Exercice 5 (CCINP PSI 2022)

$$1. \text{ Montrer l'existence de } I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x} dx$$

$$2. \text{ Montrer que } I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$$

Exercice 6 (Mines-Ponts PSI 2018)

$$1. \text{ Montrer que } \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt$$

$$2. \text{ Montrer que } \int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$