

Exercice 1

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 2 (CCINP PSI 2022)

On définit : $\forall m \in \mathbb{N}$, $A_m = \begin{pmatrix} -m-1 & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$.

1. Donner les valeurs propres et sous-espaces propres de A_m .
2. Donner si existence les valeurs de m telles que A_m soit diagonalisable. Même question pour l'inversibilité.
3. Si A_m est diagonalisable déterminer la matrice de passage P .

Exercice 3 (CCINP PSI 2022)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{1,i} = a_{i,1} = i$, les autres coefficients nuls.

1. Déterminer le rang de A ; en déduire $\ker(A)$.
2. A est-elle diagonalisable? Que dire de la multiplicité de la valeur propre 0?
3. Montrer que A possède 3 valeurs propres 0, λ et $1 - \lambda$.
4. Trouver un polynôme annulateur de degré 3.

Exercice 4 (Mines-Ponts PSI 2018)

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables?

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A .

indication :

1. Commencer par les droites stables.
2. Si P est un plan stable et v l'endomorphisme induit par A sur P , déterminer les valeurs possibles de χ_v , en déduire $\text{Sp}(v)$ puis une base de P .

Exercice 6 (CCP PSI 2016)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A .
2. Montrer que si M commute avec D , matrice diagonale semblable à A , alors M est diagonale.
3. Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^7 + M + I_3 = A$.

Exercice 7 (Mines-Télécom PSI 2022)

1. Montrer que f qui à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe $\begin{pmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix}$ est un endomorphisme et déterminer ses éléments propres.

indication : utiliser la définition et ne pas chercher à écrire son polynôme caractéristique.

2. f est-il diagonalisable? Inversible?

Exercice 8 (CCINP PSI 2022)

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $A = AB - BA$ et $f : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto XB - BX$

1. Montrer que f est un endomorphisme
2. Calculer $\text{Tr}(A)$ et $\text{Tr}(A^k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$
3. Montrer que $f(A^k) = kA^k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$
4. En déduire que A est nilpotente.

indication : raisonner par l'absurde et s'intéresser à $\text{Sp}(f)$