I Suites et séries de fonctions

Les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Intégration et dérivation des suites et séries de fonctions

a) Intégration des suites de fonctions : si (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Intégration des séries de fonctions :

— si (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ telle que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

— Théorème d'intégration terme à terme (*admis*).

c) Dérivation des suites et séries de fonctions : si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, $k \geqslant 1$, telle que, pour $j \in [\![0, k-1]\!]$, $(f_n^{(j)})$ converge simplement sur I et $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment de I alors f, la limite de (f_n), est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $f^{(k)} = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(k)}$.

Application aux séries : si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I telle que, pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I et telle que $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I alors $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et, pour $j \in [\![0, k]\!]$, $S^{(j)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$.

II Réduction des endomorphismes

1. Éléments propres

a) Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme : définitions, spectre, les sous-espaces propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes sont en somme directe, liberté d'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes, stabilité des espaces propres de u par un endomorphisme commutant avec u.

b) Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée : définition, cas d'une matrice réelle (les valeurs propres complexes sont conjuguées et les espaces propres correspondants sont de même dimension).

c) Polynôme caractéristique : ordre de multiplicité des valeurs propres, expression de la trace et du déterminant en fonction des valeurs propres, deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_{A^T}$, lien entre la dimension d'un espace propre et l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante. Le polynôme caractéristique de tout endomorphisme induit par u sur un sous-espace stable divise $\mathcal{X}_u$.

2. Réduction des endomorphismes en dimension finie (et des matrices carrées)

a) Diagonalisation : définitions équivalentes (E est somme directe des espaces propres, existence d'une base de E formée de vecteurs propres, $\dim(E)$ est égal à la somme des dimensions des sous-espaces propres), u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ, $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda(u)$, cas particulier des endomorphismes dont le polynôme est scindé à racines

À suivre : la fin de la réduction