TD12 : Réduction

Exercice 1 **(CCP PSI 2012)**
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\det(A) = 10$, $\mathrm{Tr}(A) = -6$ et $A - I_3 \notin \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$. Exprimer A^{-1} comme un polynôme en A.
indication : trouver $\mathcal{X}_A$.

Exercice 2 **(TPE-EIVP PSI 2019)**
Soit $n \geqslant 2$; trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 - A^3 - A + I_n = 0$ et $A^2 - 3A + 2I_n = 0$

Exercice 3 **(CCINP PSI 2019)**
Soit A réelle, carrée, de trace nulle telle que $A^3 - 4A^2 + 4A = 0$.

1. Montrer que les valeurs propres de A sont racines de $X^3 - 4X^2 + 4X$.
2. Déterminer toutes les matrices A possibles.
   indication : trouver $\mathrm{Sp}(A)$ d'abord.

Exercice 4 **(Mines-Télécom PSI 2022)**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.
indication : utiliser $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et chercher si les vp sont réelles ou non (étude de fonction).

Exercice 5 **(CCINP PSI 2021)**
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose : $\forall M \in E, u(M) = aM + bM^T$.

1. Montrer que u est un endomorphisme.
2. Montrer que u est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
   indication : le plus rapide est de trouver un polynôme annulateur.
3. Calculer $\mathrm{Tr}\, u$ et $\det u$.

Exercice 6 **(CCP PSI 2018)**
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, non nulles, et $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto M + \mathrm{Tr}(AM)B$.

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Déterminer $\dim(\ker(\varphi))$ et $\dim(\mathrm{Im}(\varphi))$.
3. Montrer que si M est un vecteur propre de φ associé à $\lambda \neq 1$, alors M est colinéaire à B.
4. Déterminer les valeurs propres de φ ; φ est-il diagonalisable ?

Exercice 7 **(Centrale PSI 2014)**

1. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$ est semblable à $B' = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$
   indication : Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = P\mathrm{diag}(-1, 3)P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, poser $Q = \begin{pmatrix} 2I_n & 2I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}$ et prouver que $Q \in \mathcal{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ en imaginant ce que vaut Q^{-1} à partir de P^{-1}, puis calculer $Q^{-1}BQ$.
2. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A l'est.
   indication : polynôme annulateur pour le sens « gauche/droite » et diagonaliser A pour l'autre sens.

Exercice 8 **(CCINP PSI 2022)**
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Montrer que, pour $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0) \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.
2. Déterminer $\mathrm{rg}(B)$ en fonction de $\mathrm{rg}(A)$.
3. On suppose A diagonalisable. Montrer que B est diagonalisable.
   indication : distinguer les cas $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ et $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$.
4. Étudier la réciproque.

Exercice 9 **(CCP PSI 2017)**

1. Soient $(A, B) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})^2$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que N est inversible et déterminer N^{-1}.
   indication : de la même forme que N.
2. Calculer N^2 et $P(N^2)$ pour $P \in \mathbb{C}[X]$.
3. Si N est diagonalisable, AB l'est-elle ? Étudier la réciproque.
   indication :
   a) pour le premier sens, si N est DZ, N^2 aussi puis utiliser un polynôme annulateur de N^2.

b) pour la réciproque : justifier que N^2 est DZ, puis introduire un polynôme annulateur de N^2, en déduire un polynôme annulateur de N, le factoriser (théoriquement) dans $\mathbb{C}$ et vérifier qu'il est à racines simples si 0 n'est pas une racine.

Exercice 10 (CCINP PSI 2021)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le rang de B en fonction du rang de A. En déduire que A est inversible si et seulement si B est inversible.
2. Déterminer $\mathcal{X}_B$ en fonction de $\mathcal{X}_A$. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de A et B ?
indication : calculer $\mathcal{X}_B(\lambda)$ en supposant $\lambda \neq 0$ pour commencer et faire des manipulations par blocs sur le déterminant.
3. Montrer que si A est inversible et admet n valeurs propres distinctes alors B est diagonalisable.
4. B est-elle diagonalisable si A n'est plus supposée inversible ?
5. Si B est diagonalisable, montrer que A l'est aussi.
6. Si A est diagonalisable, montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est inversible.

Exercice 11
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n$$
Déterminer la valeur de u_n en fonction de u_0, u_1 et u_2.