Espaces probabilisés

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $[\![1,n]\!]$ l'ensemble $[1,n] \cap \mathbb{N}$. Si A et B sont deux parties d'un ensemble Ω, on note $A \setminus B$ l'ensemble défini par $A \setminus B = \{\omega \in A, \omega \notin B\}$ et $\overline{A} = \Omega \setminus A$ le complémentaire de A dans Ω : $\overline{A} = \{\omega \in \Omega, \omega \notin A\}$.

I Familles sommables

1. Ensembles finis ou dénombrables

Définition [**I.1**] **:** Soit X un ensemble non vide quelconque.

1. On dit que X est **fini** s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ sur X.
   Dans ce cas, l'entier n est unique ; il est appelé **cardinal de** X et noté $\mathrm{Card}(A)$ (ou $|A|$ ou $\#A$).
2. On dit que X est **dénombrable** s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur X.
3. On dit que X est au plus dénombrable si X est fini ou dénombrable, ie s'il existe une bijection de I sur X, où I est une partie de $\mathbb{N}$.

Remarque(s) :

I.1 On dit que l'ensemble vide est lui aussi fini et $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$.

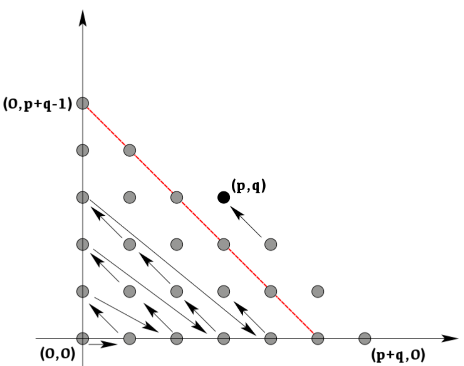
I.2 Par définition $\mathrm{Card}([\![1,n]\!]) = n$ et $\mathrm{Card}([\![a,b]\!]) = b - a + 1$ si $a \leqslant b$ sont des entiers relatifs.

I.3 Soient X et Y deux ensembles tels qu'il existe une bijection de X sur Y. Alors X est fini (resp. dénombrable) si et seulement si Y est fini (resp. dénombrable) ; de plus, si X et Y sont finis alors $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y)$.

I.4 Tout ensemble X, au plus dénombrable (non vide), peut être décrit sous la forme $\{x_n, n \in I\}$, où I est une partie de $\mathbb{N}$ et les x_i deux à deux distincts.

Propriété [**I.2**] **:**

1. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
2. Si X est dénombrable et $Y \subset X$ alors Y est au plus dénombrable.
3. Si $X_1, \dots, X_k$ sont au plus dénombrables alors le produit cartésien (fini) $X_1 \times \dots \times X_k$ est au plus dénombrable.
4. Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles dénombrables indicée par I, au plus dénombrable, alors la réunion (au plus dénombrable) $\displaystyle\bigcup_{i \in N} X_i$ est dénombrable.



On définit $f : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}^2$ par $f(n) = (p_n, q_n)$ avec

$$p_0 = q_0 = 0$$

puis, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(p_{n+1}, q_{n+1}) = \begin{cases} (p_n - 1, q_n + 1) & \text{si } p_n \geqslant 1 \\ (q_n + 1, 0) & \text{si } p_n = 0 \end{cases}$$

Remarque(s) :

(I.5) Si X et Y sont finis alors $X \times Y$ est fini et $\mathrm{Card}(X \times Y) = \mathrm{Card}(X) \times \mathrm{Card}(Y)$.

(I.6) Si X est fini et Y est dénombrable alors $X \times Y$ est dénombrable.

(I.7) $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

(I.8) $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Exemple(s) :

(I.9) Soit X un ensemble fini de cardinal n. Vérifier que $\mathcal{P}(X)$ est fini et $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(X)) = 2^n$.

(I.10) Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable : en supposant que φ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, considérer $A = \{n \in \mathbb{N}, n \notin \varphi(n)\}$ et aboutir à une absurdité.

2. Familles sommables

Définition : (Cas positif)
Soient I un ensemble fini ou dénombrable et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de réels appartenant à $[0, +\infty]$. On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est **sommable** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour toute partie finie $J \subset I$, on ait

$$\sum_{i\in J} x_i \leqslant M$$

Dans ce cas, on définit la **somme** de la famille $(x_i)_{i\in I}$ par

$$\sum_{i\in I} x_i = \sup \left\{ \sum_{i\in J} x_i, J \subset I, J \text{ finie} \right\}$$

Dans le cas contraire, on écrira $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = +\infty$.

Remarque(s) :

(I.11) S'il existe un indice $i \in I$ tel que $x_i = +\infty$ alors $(x_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, donc $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = +\infty$.

(I.12) On écrira $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i < +\infty$ pour désigner le fait que la famille de réels positifs $(x_i)_{i\in I}$ est sommable.

(I.13) Dans le cas d'une famille de réels positifs, le calcul de la somme de la famille constitue une preuve de la sommabilité : la famille est sommable si et seulement si sa somme ne vaut pas $+\infty$.

Exemple(s) :

(I.14) Si $I = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2, p \geqslant 2, q \geqslant 2\}$ et $u_{p,q} = \dfrac{1}{q^p}$ alors $(u_{p,q})_{(p,q)\in I}$ est sommable.

Propriété [I.3] : Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de réels positifs sommable et si $J \subset I$ alors $(x_i)_{i\in J}$ est sommable et

$$\sum_{i\in J} x_i \leqslant \sum_{i\in I} x_i$$

Définition [I.4] : (Cas complexe)
Soient I un ensemble fini ou dénombrable et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de complexes. On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est **sommable** si la famille $(|x_i|)_{i\in I}$ est sommable donc si

$$\sum_{i\in I} |x_i| < +\infty$$

Dans ce cas, la **somme** de la famille $(x_i)_{i\in I}$ est définie par :

- $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_i^+ - \sum_{i\in I} x_i^-$ si $(x_i)_{i\in I}$ est **réelle**, avec $x_i^+ = \dfrac{1}{2}(|x_i| + x_i)$ et $x_i^- = \dfrac{1}{2}(|x_i| - x_i)$.

- $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(x_i) + i\sum_{i\in I} \mathrm{Im}(x_i)$ si $(x_i)_{i\in I}$ est **complexe**.

Remarque(s) :

(I.15) Si $I = \mathbb{N}$, la famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x_n$ est absolument convergente et dans ce cas $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ (la somme de la famille est aussi la somme de la série).

Propriété [I.5] : (Théorème de comparaison)
Soient $(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ et $(y_i)_{i\in I} \in \left(\mathbb{R}^+\right)^I$ sont deux familles indicées par le même ensemble I telles que

$$\forall i \in I, |x_i| \leqslant y_i$$

Si $(y_i)_{i\in I}$ est sommable alors $(x_i)_{i\in I}$ est sommable

Dans ce cas, on a $\displaystyle\left|\sum_{i\in I} x_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |x_i| \leqslant \sum_{i\in I} y_i$.

Propriété [I.6] : (Linéarité)
Si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont deux familles sommables de $\mathbb{K}$, indicées par le même ensemble I, et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ alors la famille $(\alpha x_i + \beta y_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I}(\alpha x_i + \beta y_i) = \alpha\sum_{i\in I} x_i + \beta\sum_{i\in I} y_i$$

Remarque(s) :

(I.16) La réciproque est fausse : si $(x_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable et $y_i = -x_i$ alors $(x_i+y_i)_{i\in I}$ est sommable.

(I.17) Plus généralement, si $(x_i + y_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(x_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(y_i)_{i\in I}$ est sommable.

Propriété [I.7] : Soient $(x_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathbb{K}$ et σ une permutation de I (ie une bijection de I sur I). La famille $(x_i)_{i\in I}$ et sommable si et seulement si la famille $(x_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable.
Dans ce cas, on a $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_{\sigma(i)}$.

Remarque(s) :

(I.18) Cela signifie que la sommabilité et la valeur de la somme ne dépendent pas de l'ordre dans lequel on numérote les x_i.

Théorème [I.8] : (Sommation par paquets)
Soient $(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **partition** de l'ensemble I, ie

$$I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \quad \text{et} \quad n \neq m \Rightarrow I_n \cap I_m = \emptyset.$$

Alors $(x_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n}|x_i|\right) < +\infty$

Dans ce cas, on a

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n} x_i\right)$$

Remarque(s) :

(I.19) $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n}|x_i|\right)<+\infty$ signifie que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la famille $(x_i)_{i\in I_n}$ est sommable, donc $\sum_{i\in I_n}|x_i|$ existe, et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n}|x_i|\right)$ est convergente.

(I.20) Certains des I_n peuvent être vides. En particulier, s'ils sont tous vides sauf un nombre fini d'entre eux, on peut utiliser une partition finie de I.

Exemple(s) :

(I.21) Calculer $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2n+1)^2}$ sachant $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

(I.22) Montrer que $\left(\frac{1}{pq(p+q)}\right)_{p,q\geqslant 1}$ est sommable.

Théorème [I.9] : (Théorème de Fubini)
Soit $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de $\mathbb{K}$ indicée par $I\times J$, avec I et J au plus dénombrables.

Alors $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable si et seulement si $\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J}|x_{i,j}|\right)<+\infty$

Dans ce cas, on a

$$\sum_{(i,j)\in I\times J}x_{i,j}=\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J}x_{i,j}\right)=\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I}x_{i,j}\right)$$

Exemple(s) :

(I.23) Calculer $\sum_{p,q\geqslant 2}\frac{1}{q^p}$ et en déduire la valeur de $\sum_{p=2}^{+\infty}(\zeta(p)-1)$, où $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ si $x>1$.

Propriété [I.10] : Si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in J}$ sont deux familles sommables de $\mathbb{K}$ alors la famille $(x_iy_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et

$$\left(\sum_{i\in I}x_i\right)\times\left(\sum_{j\in J}y_j\right)=\sum_{(i,j)\in I\times J}x_iy_j$$

Remarque(s) :

(I.24) On retrouve ainsi la propriété sur le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

II Espaces probabilisés

1. Tribu

Définition : L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé **univers**, noté en général Ω. Les éléments de Ω sont des **éventualités** de l'expérience aléatoire.

Exemple(s) :

(II.1) Lors d'un jeu de pile ou face, on prendra $\Omega=\{P,F\}$ pour un seul lancer, $\Omega=\{P,F\}^n$ pour une expérience à n lancers et $\Omega=\{P,F\}^{\mathbb{N}}$ pour une expérience comportant une infinité de lancers.

(II.2) Si on lance un dé à 6 faces une seule fois, on choisira $\Omega=[\![1,6]\!]$; si on lance deux fois un dé à 6 faces ou deux dés à 6 faces discernables, on choisira $\Omega=[\![1,6]\!]^2$.

(II.3) Si on s'intéresse à la première apparition d'un résultat dans une expérience aléatoire répétée une infinité de fois, on pourra choisir $\Omega=\mathbb{N}^*$.

Définition : Soit Ω un ensemble. On appelle **tribu** sur Ω toute partie $\mathscr{A}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

- $\Omega \in \mathscr{A}$.
- Si $A \in \mathscr{A}$ alors $\overline{A} \in \mathscr{A}$.
- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$ alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.

Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω, univers d'une expérience aléatoire, les éléments de $\mathscr{A}$ sont appelés **événements** de l'expérience aléatoire.

Exemple(s) :

(II.4) $\mathscr{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu sur Ω.

(II.5) $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω.

(II.6) Si A est une partie de Ω alors $\mathscr{A} = \left\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\right\}$ est une tribu sur Ω.

(II.7) Si on lance 2 dés à 6 faces discernables, on prendra $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$, $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$; l'événement « la somme des faces obtenues vaut 7 » est $A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$.

Propriété [II.1] : Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω. On a les propriétés suivantes :

1. $\emptyset \in \mathscr{A}$.
2. Si $(A, B) \in \mathscr{A}^2$ alors $A \cup B \in \mathscr{A}$, $A \cap B \in \mathscr{A}$ et $A \setminus B \in \mathscr{A}$.
3. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$ alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.

Remarque(s) :

(II.8) Soit $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω, univers d'une expérience aléatoire. Ω est appelé événement certain, $\emptyset$ événement impossible. Les événements de la forme $\{\omega\}$ (singletons) sont appelés événements élémentaires.

(II.9) Si $(A, B) \in \mathscr{A}^2$, $\overline{A}$ est l'événement contraire de A, $A \cup B$ est l'événement A ou B (qui correspond à la réalisation de A ou de B) et $A \cap B$ est l'événement A et B (qui correspond à la réalisation des deux événements A et B).

Exemple(s) :

(II.10) Dans une urne, on place une boule blanche et trois boules rouges. On tire successivement deux boules dans l'urne sans remise. $\Omega = \{(B,R),(R,B),(R,R)\}$ et $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. L'événement « on tire la boule blanche » est $A = \{(B,R),(R,B)\}$; son événement contraire est $\overline{A} = \{(R,R)\}$ (événement élémentaire « on ne tire que des boules rouges »)

(II.11) Dans une urne, on place une boule blanche et trois boules rouges. On tire successivement les quatre boules sans remise. L'événement « une boule rouge est tirée en deuxième » est l'événement contraire de $\{(R,B,R,R)\}$.

Définition : Deux événements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.

Exemple(s) :

(II.12) Pour tout $A \in \mathscr{A}$, A et $\overline{A}$ sont incompatibles.

(II.13) Si A et B sont incompatibles et si $C \subset A$ alors C et B sont incompatibles.

2. Probabilité

Définition : Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω. On appelle **probabilité sur** $(\Omega, \mathscr{A})$ toute application $P : \mathscr{A} \longrightarrow [0,1]$ telle que

- $P(\Omega) = 1$.
- Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements 2 à 2 incompatibles, on a $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ *(σ-additivité)*

Un **espace probabilisé** est un triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, où $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω et P une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Exemple(s) :

II.14 Sur un ensemble fini $\Omega = \{\omega_0, \ldots, \omega_n\}$, on peut définir une probabilité en posant $P(\{\omega_k\}) = \dfrac{1}{n+1}$ (probabilité uniforme) ou en posant $P(\{\omega_k\}) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ (modèle binomial).

Remarque(s) :

II.15 **Germe de probabilité sur un univers dénombrable :** Soit $\Omega = \{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. On admettra qu'il existe une unique probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $P(\{\omega_n\}) = p_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ce résultat sera formalisé (et admis) de façon générale dans le chapitre sur les variables aléatoires discrètes .
On admet alors aussi que si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est décrit par $A = \{\omega_k, k \in I\}$ avec I fini ou dénombrable alors $P(A) = \sum_{k\in I} p_k$; ce qui signifie en particulier que cette somme est convergente (si I est dénombrable) et qu'elle est indépendante de la description de A (c'est-à-dire de l'ordre des termes dans la somme).

Définition : Soit A un événement.

1. Si $P(A) = 0$, on dit que A est **négligeable**.
2. Si $P(A) = 1$, on dit que A est **presque sûr**.

Remarque(s) :

II.16 On a $P(\emptyset) = 0$ donc $\emptyset$ est négligeable mais il existe des événements négligeables qui ne sont pas impossibles.

II.17 On a $P(\Omega) = 1$ donc Ω est presque sûr mais il existe des événements presque sûrs autres que Ω (donc qui ne sont pas certains).

Propriété [II.2] : Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Si $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux incompatibles alors $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$.
3. Pour $A \in \mathscr{A}$, on a $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.
4. Pour $(A, B) \in \mathscr{A}^2$, on a $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$.
5. Pour $(A, B) \in \mathscr{A}^2$, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Remarque(s) :

II.18 Si A et B sont deux événements alors $A \backslash B$ est un événement et

$$P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$$

On aura donc $P(A \backslash B) = P(A) - P(B)$ à condition que $B \subset A$.

Propriété [II.3] : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

1. **Continuité croissante :** si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, ie $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$, alors

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

2. **Continuité décroissante :** si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, ie $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$, alors

$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

Conséquence [II.4] : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements quelconques. On a alors

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \quad \text{et} \quad P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$$

Conséquence [II.5] : (Sous-additivité)
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements quelconque. On a

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Remarque(s) :

II.19 Si $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une famille finie d'événements, on a toujours $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$.

II.20 Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$ diverge, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$ (mais l'inégalité finale est alors sans intérêt).

Exemple(s) :

II.21 Dans une urne, on place k boules blanches et $n-k$ boules noires, indiscernables au toucher (avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$). On tire des boules dans l'urne indéfiniment avec remise. Montrer que la probabilité de ne jamais tirer une boule blanche est nulle (événement négligeable).

III Conditionnement

On considère dans tout ce paragraphe $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Probabilité conditionnelle

Définition : Soit B un événement tel que $P(B) > 0$. Si A est un événement, on définit la **probabilité conditionnelle de A sachant B**, notée $P_B(A)$ ou $P(A|B)$, par

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Propriété [III.1] : Soit B un événement tel que $P(B) > 0$. L'application $P_B : A \in \mathscr{A} \longmapsto P_B(A)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Propriété [**III.2**] **: (Formule des probabilités composées)**

1. Si A et B sont deux événements tels que $P(B) > 0$ alors $P(A \cap B) = P_B(A)P(B)$.
2. Si $A_1, \dots, A_n$ sont n événements tels que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$ alors

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

.

Remarque(s) :

(III.1) Ces formules restent valables si on pose $P_B(A) = 0$ (par exemple) si $P(B) = 0$.

(III.2) Cette formule permet à priori de calculer la probabilité de toute intersection finie ; on peut alors calculer la probabilité d'une intersection dénombrable par limite décroissante.

Exemple(s) :

(III.3) On place dans une urne une boule blanche et une boule rouge. On tire des boules dans cette urne de la façon suivante : à chaque boule tirée, on note sa couleur et on remet dans l'urne deux boules de la couleur tirée (la boule tirée et une autre de la même couleur). Montrer que la probabilité de tirer la boule rouge initiale est 1 (événement presque sûr).

2. Événements indépendants

Définition : Soient A et B deux événements. On dit que A et B sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Attention : Ne pas confondre événements indépendants et événements incompatibles.

Propriété [**III.3**] **:** Soient A et B deux événements tels que $P(B) > 0$.

A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.

Exemple(s) :

(III.4) Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ sont indépendants (de même $\overline{A}$ et B ou $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants).

(III.5) Une urne contient des boules blanches et des boules rouges. On effectue deux tirages successifs et on s'intéresse aux événements « la première boule tirée est blanche » et « la deuxième boule tirée est blanche ». Si le tirage se fait avec remise, les événements sont considérés indépendants, si le tirage est fait sans remise, ils ne le sont pas.

Définition : Soit $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille finie d'événements. On dit que les événements $A_1, \dots, A_n$ sont **indépendants** si pour toute partie $J \subset [\![1, n]\!]$ on a

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

Attention : Des événements indépendants sont deux à deux indépendants mais la réciproque est fausse. c/ex : on lance deux dés discernables ; « le premier donne un résultat pair », « le deuxième donne un résultat pair » et « la somme des deux dés est paire » sont deux à deux indépendants mais pas indépendants.

Remarque(s) :

(III.6) A, B et C sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ et $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

(III.7) Pour prouver l'indépendance de n événements, il faut vérifier $2^n - n - 1$ égalités.

(III.8) L'indépendance des événements est souvent une des hypothèses de la modélisation : si on lance un dé plusieurs fois ou si on tire une boule dans une urne avec remise, on modélisera l'expérience en considérant que les différents résultats successifs sont indépendants.

Propriété [III.4] : Soit $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie d'événements indépendants.

1. Si $B_i \in \left\{A_i, \overline{A_i}\right\}$. Alors $(B_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est aussi une famille d'événements indépendants.

2. Si $J \subset [\![1,n]\!]$, la famille $(A_i)_{i\in J}$ est aussi une famille d'événements indépendants.

Remarque(s) :

III.9 La dernière propriété peut se résumer par : toute sous-famille d'une famille d'événements indépendants est indépendante.

3. Répétition d'expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes

Définition : On appelle **expérience de Bernoulli** toute expérience aléatoire à deux issues.
Les deux issues sont en général appelées succès et échec.

Remarque(s) :

III.10 Les deux issues d'une expérience de Bernoulli sont des événements contraires l'un de l'autre. Si on note S le succès et si on pose $p = P(S) \in [0,1]$ alors la probabilité de l'échec est $P(\overline{S}) = 1 - p$.

Exemple(s) :

III.11 Un lancer de pièce (équilibrée ou non).

III.12 Dans un lancer de dé, l'événement « obtenir un 5 » peut être considéré comme un succès.

Propriété [III.5] : (Nombre de succès)
Dans une répétition de $n \geqslant 1$ expériences consécutives de Bernoulli, pour $k \in [\![0,n]\!]$ on note S_k l'événement « on obtient k succès ».
Si les résultats des n expériences sont indépendants alors

$$P(S_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

où $p \in [0,1]$ est la probabilité du succès à une des expériences.

Remarque(s) :

III.13 L'indépendance est en général contenue dans la modélisation de l'expérience : si toutes les expériences de Bernoulli se déroulent dans les mêmes conditions, on modélisera ces expériences comme indépendantes. Si on lance plusieurs fois la même pièce, le même dé ou si on effectue plusieurs tirages consécutifs avec remise dans une urne, on modélisera les expériences comme indépendantes.

Exemple(s) :

III.14 On lance n fois consécutivement une paire de dés équilibrés. Quelle est la probabilité d'obtenir k fois un tirage contenant au moins un 6 ?

Remarque(s) :

III.15 Répétition infinie : si on considère une expérience aléatoire qui consiste dans la répétition infinie d'une expérience de Bernoulli (par exemple, on lance une pièce équilibrée une infinité de fois), l'univers est alors $\Omega = \{S, \overline{S}\}^{\mathbb{N}^*}$ qui n'est pas dénombrable (donc l'utilisation de la construction évoquée précédemment dans le cas d'un univers dénombrable − germe de probabilité − n'est plus possible). On admet qu'il est possible de définir une tribu et une probabilité sur Ω qui permette de modéliser l'expérience de façon « raisonnable » : la probabilité d'obtenir k piles au cours des n premiers lancers restera $\binom{n}{k}\dfrac{1}{2^n}$, celle d'obtenir pile aux n premiers lancers $\dfrac{1}{2^n}$.

Propriété [III.6] : **(Temps d'attente du premier succès)**
Dans une répétition infinie d'expériences de Bernoulli, indicées par $\mathbb{N}^*$, (pour laquelle la probabilité du succès est $p \in]0,1[$), on considère l'événement T_n « le premier succès a lieu à la $n^{\text{ème}}$ expérience », pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Si les expériences sont indépendantes alors

$$P(T_n) = p(1-p)^{n-1}$$

De plus l'événement « on n'obtient que des échecs » est de probabilité nulle (événement négligeable).

Remarque(s) :

III.16 Une infinité d'expériences indépendantes signifie que toute sous famille finie de cette succession d'expériences est indépendante.

III.17 Si on lance une pièce équilibrée une infinité de fois, l'événement « n'obtenir que des piles » est de probabilité nulle, mais ils n'est pas impossible (même s'il est difficile à imaginer).

Exemple(s) :

III.18 Dans une urne on place k boules blanches et $n-k$ boules rouges. On tire une boule dans l'urne que l'on remet après avoir noté sa couleur (les événements « on tire une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage » sont supposés indépendants). Déterminer la probabilité qu'une boule blanche soit tirée pour la première fois au $i^{\text{ème}}$ tirage.

4. Probabilités totales

Définition :

1. Un **système complet d'événement** est une famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$, au plus dénombrable, telle que

$$\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{et} \quad \bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$$

2. Un **système quasi complet d'événement** est une famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$, au plus dénombrable telle que

$$\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{et} \quad \sum_{i\in I} P(A_i) = 1$$

Exemple(s) :

III.19 $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements.

III.20 Si $\Omega = \{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable et si $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ alors $(\{\omega_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet dénombrable d'événements.

Propriété [III.7] : **(Formules des probabilités totales)**
Soient $(A_i)_{i\in I}$ un système (quasi) complet d'événements au plus dénombrable et B un événement. Alors la famille $(P(B\cap A_i))_{i\in I}$ est sommable et

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B\cap A_i) = \sum_{i\in I} P_{A_i}(B)P(A_i)$$

Remarque(s) :

III.21 Si $P(A_i) = 0$ cette formule s'entend en posant $P_{A_i}(B)P(A_i) = 0$.

III.22 Pour un système quasi complet d'événement $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $P(B) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{A_n}(B)P(A_n)$

Exemple(s) :

III.23 On lance un dé honnête une infinité de fois et on note p_n la probabilité d'obtenir au moins un 6 au cours des n premiers lancers. Déterminer l'expression de p_n en fonction de n.

(*III.24*) Chaine de Markov : une puce se déplace sur les sommets d'un triangle ABC ; si à l'instant n elle est sur un des sommets, elle saute sur un des deux autres sommets avec une probabilité p et elle saute sur place avec une probabilité $1-2p$ ($0 < p < \dfrac{1}{2}$). On note a_n, b_n et c_n les probabilités que la puce soit en A, B ou C à l'instant n. On suppose qu'à l'instant initial ($n = 0$) la puce est en A. Déterminer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

(*III.25*) Tirages sans remise : on tire des boules sans remise dans une urne contenant p boules blanches et q boules rouges ; montrer que la probabilité de tirer h boules blanches et k boules rouges en $h+k$ tirages successifs est $\displaystyle\binom{p}{h}\binom{q}{k}\binom{p+q}{h+k}^{-1}$, si $h \leqslant p$ et $k \leqslant q$ (elle est bien sûr nulle sinon).

(*III.26*) On place une boule rouge dans une urne. On lance un dé à 6 faces ; si on fait un 6, on tire une boule dans l'urne et l'expérience s'arrête, sinon on rajoute une boule blanche dans l'urne et on recommence l'opération. Quelle est la probabilité de tirer la boule rouge ?

On utilisera $\displaystyle\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ pour $|x| < 1$.

(*III.27*) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dispose de p urnes numérotées de 1 à p. Chaque urne contient p boules et pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, l'urne numéro i contient i boules noires et $p-i$ boules blanches. On effectue l'expérience suivante : choisir au hasard une urne puis effectuer des tirages avec remise dans l'urne choisie. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_n l'événement : « on a effectué $2n$ tirages et obtenu le même nombre de boules blanches que de noires ».

1. Exprimer $P(A_n)$ sous forme d'une somme.

2. Calculer $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} P(A_n)$.

Propriété [III.8] : (Formules de Bayes)
Si A et B sont deux événements tels que $P(A)P(B) > 0$ alors

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$$

Conséquence [III.9] : Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système (quasi) complet d'événements et B un événement tel que $P(B) > 0$. Alors on a

$$P_B(A_n) = \frac{P_{A_n}(B)P(A_n)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P_{A_k}(B)P(A_k)}$$

Exemple(s) :

(*III.28*) On dispose de deux dés à 6 faces indiscernables, l'un est équilibré, l'autre est pipé et ne fait que des 6. On prend un dé au hasard, on le lance et on obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé lancé soit le dé équilibré ?

(*III.29*) On lance une pièce équilibrée une infinité de fois ; si au $n^{\text{ème}}$ lancer on obtient pile, on tire une boule dans une urne contenant 3^n boules dont une seule est blanche et toutes les autres sont rouges et l'expérience s'arrête.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge au cours de l'expérience ?

b) A l'issue de l'expérience, on a obtenu une boule blanche. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu pile pour la première fois au $n^{\text{ème}}$ lancer ?