I Réduction des endomorphismes

1. Éléments propres

a) Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme : définitions, spectre, les sous-espaces propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes sont en somme directe, liberté d'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes, stabilité des espaces propres de u par un endomorphisme commutant avec u.

b) Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée : définition, cas d'une matrice réelle (les valeurs propres complexes sont conjuguées et les espaces propres correspondants sont de même dimension).

c) Polynôme caractéristique : ordre de multiplicité des valeurs propres, expression de la trace et du déterminant en fonction des valeurs propres, deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_{A^T}$, lien entre la dimension d'un espace propre et l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante. Le polynôme caractéristique de tout endomorphisme induit par u sur un sous-espace stable divise $\mathcal{X}_u$.

2. Réduction des endomorphismes en dimension finie (et des matrices carrées)

a) Diagonalisation : définitions équivalentes (E est somme directe des espaces propres, existence d'une base de E formée de vecteurs propres, $\dim(E)$ est égal à la somme des dimensions des sous-espaces propres), u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ, $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda(u)$, cas particulier des endomorphismes dont le polynôme est scindé à racines.

b) Polynôme annulateur : si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ alors $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}(P(u))$, $\mathrm{Sp}(u)$ est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur, u est diagonalisable si et seulement si u possède un polynôme annulateur scindé à racines simples donc si et seulement si $\displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est annulateur de u, théorème de Cayley-Hamilton (*preuves non exigibles*). Tout endomorphisme induit par u diagonalisable sur un sous espace stable reste diagonalisable.

c) Trigonalisation : définition, u est trigonalisable si et seulement si $\mathcal{X}_u$ est scindé. Tout endomorphisme induit par u trigonalisable sur un sous-espace stable reste trigonalisable. Application aux suites récurrentes linéaires, au spectre de $P(A)$,...

À suivre : des probas