Familles sommables : preuves

Propriété [I.3] : Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de réels positifs sommable et si $J \subset I$ alors $(x_i)_{i\in J}$ est sommable et

$$\sum_{i\in J} x_i \leqslant \sum_{i\in I} x_i$$

Preuve :
Si K est une partie finie de J alors $K \subset I$ donc, par définition de la borne supérieure (c'est un majorant), on a $\sum_{i\in K} x_i \leqslant \sum_{i\in I} x_i$ (qui est une constante, indépendante de la partie K) donc $\sum_{i\in J} x_i \leqslant \sum_{i\in I} x_i$.

Définition [I.4] : **(Cas complexe)**
Soient I un ensemble fini ou dénombrable et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de complexes. On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est **sommable** si la famille $(|x_i|)_{i\in I}$ est sommable donc si

$$\sum_{i\in I} |x_i| < +\infty$$

Dans ce cas, la **somme** de la famille $(x_i)_{i\in I}$ est définie par :
- $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_i^+ - \sum_{i\in I} x_i^-$ si $(x_i)_{i\in I}$ est **réelle**, avec $x_i^+ = \frac{1}{2}(|x_i| + x_i)$ et $x_i^- = \frac{1}{2}(|x_i| - x_i)$.
- $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(x_i) + i \sum_{i\in I} \mathrm{Im}(x_i)$ si $(x_i)_{i\in I}$ est **complexe**.

Preuve :
- On vérifie $0 \leqslant x_i^+ \leqslant |x_i|$ et $0 \leqslant x_i^- \leqslant |x_i|$ donc le théorème de comparaison (cf plus bas) prouve la sommabilité de $(x_i^+)_{i\in I}$ et $(x_i^-)_{i\in I}$ donc l'existence des deux sommes.
- On a $|\mathrm{Re}(x_i)| \leqslant |x_i|$ et $|\mathrm{Im}(x_i)| \leqslant |x_i|$ donc le théorème de comparaison (cf plus bas) prouve la sommabilité de $(x_i^+)_{i\in I}$ et $(x_i^-)_{i\in I}$ donc l'existence des deux sommes.

Ces définition coïncident bien sûr avec les sommes habituelles lorsque I est un ensemble fini puisque $x_i = x_i^+ - x_i^-$ dans le cas réel et $x_i = \mathrm{Re}(x_i) + i\,\mathrm{Im}(x_i)$ dans le cas complexe.

Propriété [I.5] : **(Théorème de comparaison)**
Soient $(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ et $(y_i)_{i\in I} \in \left(\mathbb{R}^+\right)^I$ sont deux familles indicées par le même ensemble I telles que

$$\forall i \in I, |x_i| \leqslant y_i$$

Si $(y_i)_{i\in I}$ est sommable alors $(x_i)_{i\in I}$ est sommable

Dans ce cas, on a $\left|\sum_{i\in I} x_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |x_i| \leqslant \sum_{i\in I} y_i$.

Preuve :
Si J est finie, $J \subset I$ alors par sommation (finie) des inégalités, $\sum_{i\in J} |x_i| \leqslant \sum_{i\in J} y_i \leqslant \sum_{i\in I} y_i$ (constante) donc $(x_i)_{i\in I}$ est sommable.
Les inégalités découlent de l'inégalité triangulaire (sur les sommes finies)

Propriété [I.6] **: (Linéarité)**
Si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont deux familles sommables de $\mathbb{K}$, indicées par le même ensemble I, et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$ alors la famille $(\alpha x_i+\beta y_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I}(\alpha x_i+\beta y_i)=\alpha\sum_{i\in I}x_i+\beta\sum_{i\in I}y_i$$

Preuve :

1. Pour la sommabilité : si J finie, $J\subset I$ alors $\sum_{i\in J}|\alpha x_i+\beta y_i|\leqslant|\alpha|\sum_{i\in J}|x_i|+|\beta|\sum_{i\in J}|y_i|\leqslant|\alpha|\sum_{i\in I}|x_i|+|\beta|\sum_{i\in I}|y_i|$ (constante) donc $(\alpha x_i+\beta y_i)_{i\in I}$ est sommable.

2. Pour l'addition :

a) Dans le cas positif ($x_i\geqslant 0$ et $y_i\geqslant 0$) : si J_1 et J_2 sont deux parties finies de I, alors, puisque $J_1\cup J_2$ est aussi une partie finie de I, $\sum_{i\in J_1}x_i+\sum_{i\in J_2}y_i\leqslant\sum_{i\in J_1\cup J_2}(x_i+y_j)\leqslant\sum_{i\in I}(x_i+y_i)$. On a donc $\sum_{i\in J_1}x_i\leqslant\sum_{i\in I}(x_i+y_i)-\sum_{i\in J_2}y_i$ pour toute partie finie J_1 de I donc $\sum_{i\in I}x_i\leqslant\sum_{i\in I}(x_i+y_i)-\sum_{i\in J_2}y_i$. Ce qui donne aussi $\sum_{i\in J_2}y_i\leqslant\sum_{i\in I}(x_i+y_i)-\sum_{i\in I}x_i$, pour toute partie finie J_2 de I ; on a donc $\sum_{i\in I}y_i\leqslant\sum_{i\in I}(x_i+y_i)-\sum_{i\in I}x_i$, ie $\sum_{i\in I}x_i+\sum_{i\in I}y_i\leqslant\sum_{i\in I}(x_i+y_i)$.
On prouve l'inégalité inverse : si J est une partie finie de I alors $\sum_{i\in J}(x_i+y_i)=\sum_{i\in J}x_i+\sum_{i\in J}y_i\leqslant\sum_{i\in I}x_i+\sum_{i\in I}y_i$, pour toute partie J finie de I donc $\sum_{i\in I}(x_i+y_i)\leqslant\sum_{i\in I}x_i+\sum_{i\in I}y_i$.

b) Puis l'addition dans le cas réel : on vérifie que $(x_i+y_i)^++x_i^-+y_i^-=(x_i+y_i)^-+x_i^++y_i^+$ (tester les cas en fonction des signes de x_i et y_i) ; toutes les quantités étant positives, le premier cas peut s'appliquer et donne $\sum_{i\in I}(x_i+y_i)^++\sum_{I\in i}x_i^-+\sum_{i\in I}y_i^-=\sum_{i\in I}(x_i+y_i)^-+\sum_{i\in I}x_i^++\sum_{i\in I}y_i^+$ donc on en déduit l'égalité cherchée : $\sum_{i\in I}(x_i+y_i)^+-\sum_{i\in I}(x_i+y_i)^-=\sum_{i\in I}x_i^+-\sum_{i\in I}x_i^-+\sum_{i\in I}y_i^+-\sum_{i\in I}y_i^-$.

c) Dans le cas complexe, il suffit d'appliquer le cas réel aux parties réelles et imaginaires.

3. Pour la multiplication par un scalaire :

a) Dans le cas positif ($\alpha\geqslant 0$ et $x_i\geqslant 0$) : pour toute partie J de I finie, on a $\sum_{i\in J}\alpha x_i=\alpha\sum_{i\in I}x_i$ qui donne $\sum_{i\in I}\alpha x_i=\alpha\sum_{i\in I}x_i$

b) Dans le cas réel ($\alpha\in\mathbb{R}$ et $x_i\in\mathbb{R}$), on vérifie que $(\alpha x_i)^+=\left\{\begin{array}{cl}\alpha x_i^+ & \text{si } \alpha\geqslant 0\\ -\alpha x_i^- & \text{si } \alpha<0\end{array}\right.$ et $(\alpha x_i^-)=\left\{\begin{array}{cl}\alpha x_i^- & \text{si } \alpha\geqslant 0\\ -\alpha x_i^+ & \text{si } \alpha<0\end{array}\right.$, ce qui donnera le résultat en revenant à la définition de la somme.

c) Dans le cas complexe, il suffit de décomposer α et x_i avec leurs parties réelles et imaginaires.

Propriété [I.7] **:** Soient $(x_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathbb{K}$ et σ une permutation de I (ie une bijection de I sur I). La famille $(x_i)_{i\in I}$ et sommable si et seulement si la famille $(x_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable.
Dans ce cas, on a $\sum_{i\in I}x_i=\sum_{i\in I}x_{\sigma(i)}$.

Preuve :
Dans le cas positif, si J est une partie finie de I alors $\sigma(J)$ est aussi une partie finie de I donc $\sum_{i\in J}x_{\sigma(i)}=\sum_{k\in\sigma(J)}x_k\leqslant\sum_{i\in I}x_i$ donc $(x_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable et $\sum_{I\in I}x_{\sigma(i)}\leqslant\sum_{i\in I}x_i$. L'inégalité inverse se prouve en utilisant la réciproque σ^{-1} : on a $\sum_{i\in I}x_i=\sum_{i\in I}x_{\sigma^{-1}(\sigma(i))}\leqslant\sum_{i\in I}x_{\sigma(i)}$ par la première inégalité.
Dans le cas réel, on fait de même pour x_i^+ et x_i^- ; dans le cas complexe pour les parties réelles et imaginaires de x_i.

Théorème [I.8] **: (Sommation par paquets)**
Soient $(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **partition** de l'ensemble I, ie

$$I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \quad \text{et} \quad n \neq m \Rightarrow I_n \cap I_m = \emptyset.$$

Alors $(x_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n}|x_i|\right) < +\infty$

Dans ce cas, on a

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n} x_i\right)$$

Preuve :

1. Dans le cas positif : si J est une partie finie de I alors $J = J\cap I = J \cap \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(J\cap I_n)$ et cette réunion comporte un nombre fini d'ensembles non vides (car J est finie) ; il existe donc un entier N_J tel que $I_n \cap J = \emptyset$ pour $n > N_J$. Par commutativité des sommes finies, on a $\displaystyle\sum_{i\in J} x_i = \sum_{n\leqslant \mathbb{N}_J}\sum_{i\in I_n\cap J} x_i$.

   Si on suppose que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n} x_i\right) < +\infty$, alors $\displaystyle\sum_{i\in I_n\cap J} x_i \leqslant \sum_{i\in I_n} x_i$ et $\displaystyle\sum_{i\in J} x_i \leqslant \sum_{n\leqslant N_J}\sum_{I\in I_n} x_i \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n} x_i\right) < +\infty$ donc $(x_i)_{i\in I}$ est sommable et $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n} x_i\right)$.

   Si on suppose $(x_i)_{i\in I}$ sommable alors $I_n \subset I$ donc, d'après **I.3**, $(x_i)_{i\in I_n}$ est aussi sommable. De plus, les I_n étant deux à deux disjoints, $\displaystyle\sum_{n\leqslant N}\sum_{i\in I_n} x_i = \sum_{i\in \bigcup_{n\leqslant N} I_n} x_i \leqslant \sum_{i\in I} x_i$ d'après **I.3** car $\displaystyle\bigcup_{n\leqslant N} I_n \subset I$. La somme partielle de la SATP $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n} x_i\right)$ est donc majorée par $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i$ donc la série converge et on a $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n} x_i\right) \leqslant \sum_{i\in I} x_i$.
2. Dans le cas général, la sommabilité se prouve en appliquant ce qui vient d'être fait à la famille positive $(|x_i|)_{i\in I}$
3. Dans le cas réel, l'égalité sur les sommes se prouve en appliquant le premier point aux familles $(x_i^+)_{i\in I}$ et $(x_i)^-_{i\in I}$. Dans le cas complexe, avec les parties réelles et imaginaires de x_i.

Théorème [I.9] **: (Théorème de Fubini)**
Soit $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de $\mathbb{K}$ indicée par $I\times J$, avec I et J au plus dénombrables.

Alors $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable si et seulement si $\displaystyle\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J}|x_{i,j}|\right) < +\infty$

Dans ce cas, on a

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} x_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} x_{i,j}\right)$$

Preuve :
On introduit une énumération de I : $I = \{i_n, n\in\mathbb{N}\}$ et on pose $I_n = \{(i_n, j), j\in J\}$ qui constitue une partition de $I\times J$ (si I est finie, on a $I = \{i_n, n\leqslant N\}$ et on complète la partition avec des ensembles $I_n = \emptyset$ pour $n > N$). On applique alors **I.8** : $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable si et seulement si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{(i,j)\in I_n}|x_{i,j}| < +\infty$ mais $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I_n}|x_{i,j}| = \sum_{j\in J}|x_{i_n,j}|$ donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{(i,j)\in I_n}|x_{i,j}| = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}|x_{i,j}|$.
En cas de sommabilité, l'égalité des sommes se prouve de la même façon (avec le théorème de sommation par paquets, avec la même partition, mais sans les modules).

Propriété **[I.10] :** Si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in J}$ sont deux familles sommables de $\mathbb{K}$ alors la famille $(x_iy_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et

$$\left(\sum_{i\in I} x_i\right)\times\left(\sum_{j\in J} y_j\right)=\sum_{(i,j)\in I\times J} x_iy_j$$

Preuve :
On applique le théorème de Fubini à la famille $(y_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ avec $y_{i,j}=x_ix_j$: $\displaystyle\sum_{j\in J}|y_{i,j}|=|x_i|\sum_{j\in J}|x_j|$ car x_i est indépendant de l'indice j, puis $\displaystyle\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}|y_{i,j}|=\left(\sum_{j\in J}|x_j|\right)\sum_{i\in I}|x_i|<+\infty$ (la somme sur $j\in J$ ne dépend pas de l'indice i). On a donc prouvé la sommabilité de $(y_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$.
L'égalité des sommes se prouve de même, avec le théorème de Fubini, en faisant le même calcul sans les modules.