# TD13 : Espaces probabilisés

---

**Exercice 1**

Un voyageur se déplace dans 3 villes A, B et C. Au départ il se trouve dans la ville A. Si à l'instant $n$ , il se trouve dans une des villes, à l'instant $n+1$, il se trouve de façon équiprobable dans l'une des deux autres villes .

1. Soit $J_n$= « le voyageur revient pour la $1^{\text{ère}}$ fois dans A au jour n ». Calculer $P(J_n)$.
   *indication : décrire $J_n$ en fonction de la première ville dans laquelle il se rend.*
2. Calculer la probabilité que le voyageur repasse dans A.

**Exercice 2 (Centrale PSI 2015)**

Trois joueurs $A$, $B$ et $C$ se passent une balle de la façon suivante :

— $A$ passe la balle à $B$ avec une probabilité $1/3$ et à $C$ avec une probabilité $2/3$.
— $B$ passe la balle à $A$ avec une probabilité $1/3$ et à $C$ avec une probabilité $2/3$.
— $C$ passe la balle à $A$ avec une probabilité $1/3$ et à $B$ avec une probabilité $2/3$

On note $X_n = \begin{pmatrix} p(A_n) & p(B_n) & p(C_n) \end{pmatrix}^T$, où $A_n$ est l'événement « $A$ a la balle à l'instant $n$ », $B_n$ et $C_n$ de même avec $B$ et $C$.

1. Déterminer $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = MX_n$.
2. Déterminer la limite de $(X_n)$.

**Exercice 3 (Mines-Télécom PSI 2022)**

On lance une pièce qui donne pile avec la probabilité $p \in ]0,1[$. On fait deux lancers : si on fait $PP$, on a gagné ; si on fait $FF$, on a perdu ; sinon on recommence.

1. Quelle est la probabilité de gagner ?
2. Est-on presque sûr que le jeu se termine ?

**Exercice 4**

Une personne lance une pièce qui donne pile avec la probabilité $p$ (où $p \in ]0,1[$ ). Elle gagne dès qu'elle a obtenu 2 piles de plus que de faces, et elle perd dès qu'elle a obtenu 2 faces de plus que de piles.

1. Soit $E_{2n}$= « Obtenir autant de piles que de faces lors des $2n$ premiers lancers sans que la partie ne s'arrête ». Calculer $P(E_{2n})$
2. Soit $G_{2n}$= « Elle gagne la partie à l'issu du $2n^{\text{ème}}$ lancer ». Calculer $P(G_{2n})$
3. Quelle est la probabilité que la personne gagne la partie ? Probabilité qu'elle perde la partie ?

**Exercice 5**

Deux joueurs A et B jouent à tour de rôle avec 2 dés honnêtes . A lance les deux dés. Si la somme des points obtenus par A vaut 6, A gagne la partie et le jeu s'arrête. Sinon, B lance les deux dés. Si la somme des points obtenus par B vaut 7 , B gagne la partie et le jeu s'arrête. Sinon il passe les dés à A qui rejoue. Et ainsi de suite ...
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit les évènements suivants :
$A_k$ = « A gagne la partie après avoir lancé pour la $k^{\text{ème}}$ fois les dés ».
$E_k$ = « la somme des points obtenus par A lorsqu'il lance pour la $k^{\text{ème}}$ fois les dés vaut 6 ».
$F_k$ = « la somme des points obtenus par B lorsqu'il lance pour la $k^{\text{ème}}$ fois les dés vaut 7 ».

1. Exprimer $A_k$ à l'aide des $(E_i)_i$ et des $(F_i)_i$. En déduire $P(A_k)$.
   Quelle est la probabilité que $A$ gagne ?
2. Quelle est la probabilité que $B$ gagne ?
3. Quelle est la probabilité que le jeu ne se termine pas ?

**Exercice 6 (Centrale PC 2015)**

Les joueurs $A$ et $B$ possèdent $N$ billes : $A$ en possède $n$ et $B$ les $N-n$ autres. A chaque partie, $A$ gagne avec la probabilité $p$ ; s'il gagne, $B$ lui donne une bille, s'il perd, il donne une bille à $B$. On note $p_n$ la probabilité que $A$ gagne la partie avec $n$ billes au départ ($A$ gagne s'il obtient les $N$ billes). Déterminer $p_n$.
*indication : trouver une relation de récurrence sur la suite $(p_n)$ en conditionnant par le résultat de la première partie. Si on pose $A_1$ « $A$ gagne la première partie » et $E_n$ « $A$ gagne avec $n$ billes », expliquer pourquoi $P_{A_1}(E_n) = P(E_{n+1})$.*