Intégrales dépendant d'un paramètre

La notation $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des nombres réels, soit le corps des nombres complexes. On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points distincts.

I Le théorème de convergence dominée

Définition : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur** I vers $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ si

$$\forall x \in I, \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

La fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est appelée **limite simple** de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple(s) :

(I.1) La suite de fonction (g_n) définie sur $\mathbb{R}$ par $g_n(t) = nt^n$ converge simplement sur $]-1,1[$ vers la fonction nulle mais elle ne converge pas simplement sur $]-1,1]$.

(I.2) La suite (f_n) définie par $f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } t\in[0,n] \\ 0 & \text{si } t>n \end{cases}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $t \mapsto e^{-t}$.

Attention :

1. *La suite (f_n) de fonctions continues, définie par $f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x\in[0,1[\\ 1 & \text{si } x=1 \end{cases}$ pourtant f n'est pas continue.*
2. *La suite (g_n) définie par $g_n : x \in [0,1] \mapsto n^2(1-x)x^n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $g = 0$ (qui est cette fois continue) mais $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \neq \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t$.*

Théorème [I.1] : (Théorème de convergence dominée)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On suppose que :

- la suite (f_n) converge simplement sur I vers f.
- les fonctions f_n et la fonction f sont continues par morceaux sur I.
- il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, **indépendante de** n et intégrable sur I telle que

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in I, |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$$

Alors les fonctions f_n et la fontion f sont intégrables sur I et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n = \int_I f$$

Remarque(s) :

(I.3) L'hypothèse la plus importante (qui donne son nom au théorème) est l'hypothèse de domination. Elle se vérifie en deux temps :
— on commence par majorer le module de $f_n(x)$ par une fonction φ **indépendante de** n (en n'utilisant que les symboles $=$ et $\leqslant$).
— Une fois que la fonction φ est trouvée, on prouve son intégrabilité sur I : le plus souvent, on vérifie qu'elle est continue par morceaux et on lui applique le théorème de comparaison (donc on peut cette fois utiliser les symboles $\sim$, o, O,...)

(I.4) Inégalités à connaître (avec leurs domaines) :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in]-1,+\infty[& , & \ln(1+x) \leqslant x \\ \forall x \in \mathbb{R} & , & e^x \geqslant 1+x \\ \forall x \in \mathbb{R} & , & |\sin(x)| \leqslant |x| \\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & , & 0 \leqslant \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \end{array}$$

Exemple(s) :

(I.5) Limite et équivalent de $u_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.

(I.6) Limite de $v_n = n\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$

(I.7) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ en utilisant $I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.

(I.8) Calculer $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}\int_0^{\pi/2} \sin^n t\,\mathrm{d}t$

II Continuité des intégrales à paramètres

On s'intéresse dans la suite de ce chapitre à des fonctions g, définies sur un intervalle A de $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t,$$

où $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K}$. L'intervalle d'intégration I est donc indépendant de x.

Tous les théorèmes qui suivent sont des conséquences du théorème de convergence dominée : ils comporteront donc tous une *hypothèse de domination* indispensable !

Théorème [II.1] : (Théorème de continuité)
Soit $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K}$. On suppose que :

▷ pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur A.

▷ pour tout $x \in A$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I.

▷ il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, **indépendante de** x et intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I, |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \in A \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur A.

Remarque(s) :

(II.1) L'hypothèse de domination se prouve en deux temps :
— On commence par déterminer φ **indépendante de** x telle que $\forall (x,t) \in A\times I, |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$, en n'utilisant pour cela que les symboles $=$ et $\leqslant$.
— Puis on prouve que φ est continue par morceaux et intégrable sur I, en utilisant en général le théorème de comparaison (donc des symboles $\sim, o, O, \ldots$)

Conséquence **[II.2] : (Théorème de continuité avec domination locale)**
Soit $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K}$. On suppose que :

- ▷ pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur A.
- ▷ pour tout $x \in A$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I.
- ▷ pour tout segment $[a,b] \subset A$, il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, **indépendante de** x et intégrable sur I telle que
$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I, |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \in A \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur A.

Remarque(s) :

(II.2) La conclusion de cette propriété est exactement la même que celle du théorème précédent alors que l'hypothèse de domination sur un segment est plus facile à obtenir ; on utilisera donc cette propriété plutôt que le théorème précédent pour prouver la continuité d'une telle fonction g.

(II.3) Dans ces deux propriétés, l'intégrabilité de la fonction dominante φ redonne l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto f(x,t)$ sur I donc l'existence de $g(x)$.

(II.4) Dans la conséquence, la fonction dominante φ peut dépendre de a et b mais elle doit être **indépendante de** x (la preuve de cette hypothèse de domination se fait donc à nouveau en deux temps).

Théorème **[II.3] : (Théorème de convergence dominée à paramètre continu)**
Soient $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ et a une **borne de l'intervalle** A. On suppose que :

- ▷ pour tout $t \in I$, $\lim\limits_{x \to a} f(x,t) = \ell(t)$.
- ▷ pour tout $x \in A$, les fonctions $t \longmapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I.
- ▷ il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, **indépendante de** x et intégrable sur I telle que
$$\forall (x,t) \in A \times I, |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors la fonction ℓ est intégrable sur I et
$$\lim_{x \to a} \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque(s) :

(II.5) Ce théorème est une extension du TCD où on remplace le paramètre entier n par un paramètre continu x.

(II.6) Ce théorème sert à étudier le comportement de la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ aux bornes de son intervalle de définition A.

(II.7) Pour appliquer ce théorème, a doit être **une borne de** A ce qui implique les deux remarques suivantes :
- — on ne peut pas se placer sur des segments de A pour trouver une domination.
- — on peut choisir l'intervalle A en fonction de la borne a à étudier : si on souhaite étudier la limite en $+\infty$ de g, qui est définie sur $]0,+\infty[$, on peut se placer sur $A = [1,+\infty[$ par exemple, ie **UN intervalle dont** a **est une borne**.

Exemple(s) :

(II.8) Étudier $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$.

(II.9) Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Calculer $f(x) + f(x+1)$ et en déduire des équivalents de f en 0 et $+\infty$.

III Dérivation des intégrales à paramètres

Théorème [III.1] : **(Théorème de dérivation)**
Soit $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K}$. On suppose que :

- ▷ pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A.
- ▷ pour tout $x \in A$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.
- ▷ pour tout $x \in A$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I.
- ▷ il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, **indépendante de** x et intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \in A \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et

$$\forall x \in A, g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque(s) :

(III.1) Là encore la dominante φ doit être **indépendante de** x.

Attention : Ne pas oublier de vérifier que, pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est intégrable sur I (ce qui prouve que la fonction g est définie sur A).

Conséquence [III.2] : **(Théorème de dérivation avec domination locale)**
Soit $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K}$. On suppose que :

- ▷ pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A.
- ▷ pour tout $x \in A$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.
- ▷ pour tout $x \in A$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I.
- ▷ pour tout segment $[a,b] \subset A$, il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, **indépendante de** x et intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \in A \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et

$$\forall x \in A, g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque(s) :

(III.2) À nouveau, cette propriété donne la même conclusion que le théorème précédent alors qu'elle est plus facile à appliquer (la domination sur un segment est plus facile à obtenir) ; on appliquera donc plutôt cette propriété pour prouver la classe $\mathcal{C}^1$ d'une telle fonction g.

(III.3) L'hypothèse de domination se prouve, comme à chaque fois, en deux temps : d'abord on majore $|f(x,t)|$ **indépendamment de** x pour trouver la fonction φ, puis on prouve que φ est intégrable (par comparaison).

Exemple(s) :

(III.4) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

(III.5) Calculer, pour $x \geqslant 0$, $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(x+t^2\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

(III.6) Soit $f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

a) Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer $f'(x)$ pour $x > 0$.

b) En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ puis de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$

Conséquence [III.3] : Soient $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

- ▷ pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A.
- ▷ pour tout $x \in A$ et pour $0 \leqslant p \leqslant k-1$, les fonctions $t \longmapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ sont continues par morceaux et intégrables sur I.
- ▷ pour tout $x \in A$, la fonction $t \longmapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I.
- ▷ pour tout segment $[a,b] \subset A$, il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, **indépendante de** x et intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I, \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \in A \longmapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A et, pour $1 \leqslant p \leqslant k$, on a

$$\forall x \in A, g^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque(s) :

(III.7) La notation $\frac{\partial^0 f}{\partial x^0}$ désigne en fait la fonction f elle-même.

(III.8) Cette propriété redonne la propriété précédente (classe $\mathcal{C}^1$) dans le cas $k = 1$.

(III.9) Au risque de se répéter : la dominante φ doit être **indépendante de** x, mais elle peut dépendre de a, b et k.

Exemple(s) :

(III.10) Étude de la fonction Γ définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

(III.11) Transformée de Fourier : soit f continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ telle que $x \mapsto x^k f(x)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N}$ fixé).

On pose $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}\,\mathrm{d}t$ (la transformée de Fourier de f).

a) La fonction $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

b) Exemple du calcul de la transformée de Fourier d'un « créneau » et de $t \mapsto e^{-t^2}$.

(III.12) Transformée de Laplace : soit f continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ telle $x \mapsto f(x)e^{-\alpha x}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ fixé).

On pose $L_f(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$ (la transformée de Laplace de f)

a) La fonction L_f est continue sur $[\alpha, +\infty[$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\alpha, +\infty[$.

b) Exemple du calcul de la transformée de Laplace de $t \mapsto t^n$ ($n \in \mathbb{N}$) et $t \mapsto e^{zt}$ avec $z \in \mathbb{C}$.

c) On a $\lim_{p\to+\infty} L_f(p) = 0$.

d) Si f admet une limite finie en $+\infty$ alors $\lim_{p\to 0^+} pL_f(p) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ (théorème de la valeur finale).