TD14 : Intégrales à paramètres

Exercice 1

Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+x^n e^{-x}}$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 2 (CCP PSI 2017)

On pose $f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t)$ si $t \in]0,n]$ et $f_n(t) = 0$ si $t > n$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer sa limite.
2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Sachant que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$, montrer que $\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = -\gamma$. On pourra faire le changement de variable $t = nu$ puis une IPP.
   indication : il y a plusieurs primitives pour une fonction

Exercice 3 (Centrale PSI 2022)

Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

1. Justifier l'existence de u_n pour $n \geqslant 1$
2. Montrer que $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n$ avec $v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $t \in [0,\alpha]$ alors $\ln(\cos t) \geqslant -2t^2$
4. Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$; on donne $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

Exercice 4 (Mines-Ponts PSI 2019)

Pour $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(nt)}{(1+n^4t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de I_n
2. Limite et équivalent de I_n ?
   indication : poser $u = n^2 t$ pour l'équivalent.

Exercice 5 (Mines-Ponts PSI 2021)

Soit $x > 0$; on pose $f(x) = \int_0^1 t^{t^x}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(xn+1)^{n+1}}$

indication : commencer par justifier que $f(x)$ existe et en profiter pour trouver quelle somme de série faire intervenir.

Exercice 6 (CCP PSI 2022)

Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Pour tout $x > 0$, calculer $f(x-1) - f(x)$.
   En déduire une expression de f sous la forme d'une série de fonctions.
4. Proposer une autre méthode pour décomposer $f(x)$ en somme de série ; obtient-on la même série ?

Exercice 7 (Mines-Ponts PSI 2010)

Ensemble de définition, continuité, monotonie et équivalent en $+\infty$ de f définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+(xt)^2}\,\mathrm{d}t$?

indication : poser $u = xt$ pour l'équivalent en $+\infty$.