I Convergence dominée

Exercice 1 *[Solution]*
Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos\frac{t}{n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} x^{-\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_0^{n} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} e^{-2x}\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_0^{1} x^n \frac{\ln x}{(1-x^2)^{1/4}}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 2 (CCP MP 2014) *[Solution]*
Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+x^n e^{-x}}$.

Exercice 3 (CCP PSI 2010) *[Solution]*
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Étudier l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $f : t \mapsto \dfrac{\arctan t}{t^\alpha}$.

2. Existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^{3/2}+t^n}\,\mathrm{d}t$ et limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 (CCINP PSI 2018) *[Solution]*

1. Montrer que $|\sin x| \leqslant |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

2. Montrer l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ et en trouver un équivalent.

Exercice 5 (CCINP PSI 2021) *[Solution]*
Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3}\,\mathrm{d}x$, pour $n \geqslant 1$.

1. Justifier l'existence de I_n.

2. Montrer que $I_n = \dfrac{1}{n^{5/3}} J_n$ avec $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n^{1/3}\sin\left(\frac{t}{n^{1/3}}\right)}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{+\infty} J_n = K = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$

4. Montrer, par changement de variable que $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.

5. En déduire $2K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$

6. Conclure $I_n \sim \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}n^{5/3}}$

Exercice 6 (Mines-Ponts PSI 2019) *[Solution]*
Pour $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(nt)}{(1+n^4t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de I_n

2. Limite et équivalent de I_n ?

Exercice 7 (Mines-Ponts PSI 2019) *[Solution]*

1. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{1} \frac{x^n}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x$ est définie.

2. Trouver la limite et un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8 (Mines-Ponts PSI 2018) *[Solution]*
Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{1} \ln(x)\ln(1-x^n)\,\mathrm{d}x$, pour $n \geqslant 1$.

1. Justifier l'existence de I_n.

2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

3. Déterminer un équivalent de I_n

Exercice 9 (CCP PSI 2018) *[Solution]*

1. Résoudre l'équation $\mathrm{sh}(x) = 1$.

2. On pose $\alpha = \ln(1+\sqrt{2})$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{\alpha} (\mathrm{sh}\, t)^n \,\mathrm{d}t$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

3. Montrer que $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$ pour $n \geqslant 2$.

4. Déterminer un équivalent de I_n.

Exercice 10 (CCINP PSI 2019) *[Solution]*

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}^n\, t}$

1. Montrer que $I_n(x)$ existe pour $n \in \mathbb{N}$

2. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de (I_n)

3. Trouver une relation entre I_n et I_{n+2}

4. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{sh}^2\, t}{\mathrm{ch}^3\, t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 11 (CCP PSI 2013) *[Solution]*

Pour $n > 0$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{nx + x^2}$

1. Montrer que les f_n sont prolongeables par continuité en 0 et intégrables sur $[0, +\infty[$.

2. Montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 12 (CCP PSI 2017) *[Solution]*

On pose $f_n(t) = \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t)$ si $t \in]0, n]$ et $f_n(t) = 0$ si $t > n$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer sa limite.

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Sachant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = -\gamma$. On pourra faire le changement de variable $t = nu$ puis une IPP.

Exercice 13 (CCP PSI 2018) *[Solution]*

Pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \sin(x) & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Étudier la convergence simple de (f_n).

2. Étudier la convergence de $(v_n)_{n\geqslant 1}$, où $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

3. a) Étudier les variations de $x \mapsto \ln(1+x) - x$.

b) En déduire que (f_n) converge uniformément.

indication : montrer que $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 1 - e^{n^{1/4} - n\ln(1-n^{-3/4})}$ *si* $x \in \left[0, n^{1/4}\right]$ *et* $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2e^{-x}$ *si* $x \geqslant n^{1/4}$

Exercice 14 (Centrale PSI 2011) *[Solution]*

1. Pour quels entiers n, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\sin t + t^n}\,\mathrm{d}t$ est-elle définie ?

2. Donner la limite I de (I_n) sous forme d'une intégrale.

3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n(I_n - I)$ (on pourra faire un changement de variable).

Exercice 15 (Centrale PSI 2007) *[Solution]*

cours : changement de variable.

Application : équivalent en $+\infty$ de $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$ où $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ et $f(1) \neq 0$.

Exercice 16 **(CCP PSI 2013)** *[Solution]*
Déterminer la limite de $n \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est continue sur $[0,1]$.

Exercice 17 **(Mines-Ponts MP 2011)** *[Solution]*
Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{x+1}{x^n e^x + x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 18 **(ENTPE-EIVP PC 2014)** *[Solution]*
Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{n+2}+1}\,\mathrm{d}x$

Exercice 19 **(Mines-Ponts PSI 2013)** *[Solution]*
Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-x^n)\,\mathrm{d}x$, puis la convergence de la série de terme général u_n.

Exercice 20 **(Centrale PSI 2022)** *[Solution]*
Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

1. Justifier l'existence de u_n pour $n \geqslant 1$
2. Montrer que $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n$ avec $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $t \in [0,\alpha]$ alors $\ln(\cos t) \geqslant -2t^2$
4. Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$; on donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

Exercice 21 **(ENSEA PSI 2016)** *[Solution]*

1. Énoncer le théorème de convergence dominée.
2. Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles bornées telles qu'il existe $c < d$ pour lesquels $\forall x \in [c,d], (a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ tend vers 0.
   Montrer qu'il existe φ_n tel que $a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = \sqrt{a_n^2+b_n^2}\cos(nx+\varphi_n)$.
3. Calculer $I_n = \displaystyle\int_c^d (a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))^2\,\mathrm{d}x$ et montrer qu'à partir d'un certain rang on a $I_n \geqslant \dfrac{(a_n^2+b_n^2)(d-c)}{4}$.
4. Conclure que (a_n) et (b_n) tendent vers 0.

II Intégration terme à terme

Exercice 22 **(ENSAM PSI 2011)** *[Solution]*

1. Convergence de la série de terme général $(-1)^n a_n$ où $a_n = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,t^n\,\mathrm{d}t$ et calcul de sa somme.
2. Etablir une relation entre a_n et a_{n+2}.
3. Convergence de la série de terme général a_n et calcul de la somme.

Exercice 23 **(Mines-Ponts PSI 2010)** *[Solution]*
Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x$ et expression sous forme d'une série.

Exercice 24 **(CCP PSI 2015)** *[Solution]*

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^n}$ et $I = \displaystyle\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x$ existent.
2. Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $f_{n,p}(t) = t^p(\ln t)^n$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_{n,p}(t)\,\mathrm{d}t$
3. Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$.

Exercice 25 **(Mines-Ponts PSI 2021)** *[Solution]*
Soit $x > 0$; on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{t^x}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(xn+1)^{n+1}}$

Exercice 26 **(Mines-Ponts PSI 2007)** *[Solution]*
Pour $a > 0$ et $b > 0$, montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{an+b} = \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{1+t^a}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 27 **(ENTPE-EIVP PC 2015)** *[Solution]*
Calculer $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x$ de deux façons différentes et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

Exercice 28 **(CCP PSI 2006)** *[Solution]*
Montrer que $\displaystyle\frac{1}{x^\alpha}\int_0^x \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ existe pour $x \in]0,1[$ et $\alpha > 0$. En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}(1+3n)}$

Exercice 29 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t$. On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

1. Montrer que I existe

2. Montrer que $I = \displaystyle\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

Exercice 30 **(CCINP PSI 2018)** *[Solution]*
Montrer que $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{2}{n^3}$

Exercice 31 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*

1. Montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x$

2. Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$

Exercice 32 **(CCP PSI 2018)** *[Solution]*
Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\operatorname{sh}(t)}\,\mathrm{d}t = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2+1}$.
indication : utiliser $|\sin(t)| \leqslant t$ pour appliquer le TITT

Exercice 33 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*

1. Montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(2n-1)^2}$ et en déduire la valeur de I à l'aide de constantes usuelles.

indication : $-\ln(1-u) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u^n}{n}$ *si* $|u| < 1$

Exercice 34 **(Centrale PSI 2019)** *[Solution]*

1. Soient $(u_n) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On pose $b_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et $a_n = b_{n+1} - b_n$.
Montrer que $\sum a_n$ converge et en déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.

2. Pour $x \in]-1,0[$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-t)^x}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier que f est bien définie.

b) À l'aide de **1**, montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x(x-1)\dots(x-n+1)}{n\times n!}$

indication : $(1-t)^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}t^n$ *si* $|t| < 1$

Exercice 35 **(ENSAM PSI 2015)** *[Solution]*

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, justifier l'existence de $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$.

2. Montrer que $I(\alpha) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{a}{b+n^2}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

3. En déduire un équivalent de $I(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

Exercice 36 **(CCINP PSI 2018)** *[Solution]*
Soit (a_n) une suite complexe telle que $\sum |a_n|$ converge.

1. Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 37 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

Exercice 38 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Solution]*

1. Soit $a, b > 0$. Montrer que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$, $\displaystyle\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $f_n(t) = e^{-(n+1)t}\left(1 - \dfrac{1-e^{-t}}{t}\right)$ pour $t > 0$. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.

4. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} f$ où f est la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

Exercice 39 **(CCINP PSI 2019)** *[Solution]*

1. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t}\,\mathrm{d}t$ existe.

2. Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{1+n^2}$

Exercice 40 **(Mines-Ponts PSI 20121)** *[Solution]*

1. Étudier la convergence et la convergence absolue de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2}$

2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$

Exercice 41 **(ENSEA PSI 2018)** *[Solution]*

Nature et somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ avec $u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 42 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs croissante qui tend vers $+\infty$.

1. Montrer que $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-\lambda_n x}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}$

Exercice 43 **(Mines-Ponts PSI 2015)** *[Solution]*

1. Déterminer le domaine de convergence de $f(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2}$.

2. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer cette intégrale.
indication : pour le calcul de l'intégrale, on a calculé la somme de la série dans le chapitre sur les séries.

Exercice 44 **(AADN PSI 2012)** *[Solution]*

1. Montrer que la série de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(t) = t^n \sin(\pi t)$ converge simplement et déterminer la somme de $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ notée F. Y a-t-il convergence uniforme ?

2. Montrer que $\sum_{n \geqslant 0} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 45 **(CCP PSI 2018)** *[Solution]*

Soit $u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge.
indication : montrer que $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *soit par IPP, soit en vérifiant que* $\sin(\pi x) \leqslant \pi(1-x)$

2. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 46 **(TPE-EIVP PSI 2018)** *[Solution]*

Existence et valeur de $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t$ sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 47 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Solution]*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^+)$. On pose $u_n = \int_0^1 f(t) t^n\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $I = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que I et $\sum u_n$ sont de même nature . Lien entre les deux en cas de convergence ?

III Continuité

Exercice 48 **(CCP PSI 2018)** *[Solution]*

1. Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + x^3 + t^3}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. Trouver (a,b,c) tel que $\frac{1}{1+t^3} = \frac{a}{1+t} + \frac{bt+c}{1-t+t^2}$ et déterminer $f(0)$.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 49 **(CCP PSI 2021)** *[Solution]*

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Vérifier que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^{+*}$ et que f est continue.

2. Soit $v_n = \int_{n-1}^{n} \ln(f(u))\,\mathrm{d}u$; Etudier la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{v_n}$.
Indication donnée : poser $\varphi(x) = \int_{x-1}^{x} \ln(f(u))\,\mathrm{d}u$.

Exercice 50 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.

2. Montrer que f est continue sur D.

3. Montrer que si $x \in D$ alors $1 - x \in D$ et $f(x) = f(1-x)$

4. Déterminer la limite de f aux bornes de D.

Exercice 51 **(CCP PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Pour tout $x > 0$, calculer $f(x-1) - f(x)$.
   En déduire une expression de f sous la forme d'une série de fonctions.
4. Proposer une autre méthode pour décomposer $f(x)$ en somme de série ; obtient-on la même série ?

Exercice 52 **(Mines-Ponts PC 2015)** *[Solution]*
Déterminer le domaine de définition et la limite en $+\infty$ de $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^x)^{1/x}}$.

Exercice 53 **(Mines-Ponts PC 2006)** *[Solution]*
Montrer que pour $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \arctan t \,\mathrm{d}t$ est définie. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et trouver un équivalent de f en 0.

Exercice 54 **(Mines-Ponts PSI 2021)** *[Solution]*
Soit $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{1+x^2t^2}$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si $u \geqslant 0$, $0 \leqslant 1 - u + u^2 - \dfrac{1}{1+u} \leqslant u^3$
3. Montrer que f admet un $\mathrm{DL}_5(0)$

Exercice 55 **(Mines-Ponts PSI 2010)** *[Solution]*
Ensemble de définition, continuité, monotonie et équivalent en $+\infty$ de f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+(xt)^2}\,\mathrm{d}t$?
indication : poser $u = xt$ pour l'étude en $+\infty$.

Exercice 56 **(Centrale PSI 2016)** *[Solution]*

1. Montrer la convergence, pour $x > 0$ de $f(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   indication : pour toute la suite de l'exercice, poser $t = xu$; pour la limite, TCD.
3. Justifier que f est prolongeable par continuité en 0

Exercice 57 **(Mines-Ponts PC 2009)** *[Solution]*
On note E l'ensemble des fonctions continues sur $]0, +\infty[$ telles que $\forall s > 0$, $\dfrac{f(u)}{u+s}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Comparer E à l'ensemble L des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$ du point de vue de l'inclusion.
2. Pour quelles valeurs de α, f_α définie par $f_\alpha(u) = u^{\alpha-1}$ est-elle dans E ?
3. Montrer que $\hat{f}_\alpha(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{s+u}\,\mathrm{d}u$ est proportionnelle à $f_\alpha(s)$.
4. Montrer que $\hat{f} : s \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{s+u}\,\mathrm{d}u$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, si $f \in E$, et donner sa limite en $+\infty$.

IV Classe $\mathcal{C}^1$ et plus

Exercice 58 **(CCP PSI 2017)** *[Solution]*

1. Montrer que le domaine de définition de $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t}\,\mathrm{d}t$ contient $]-1, 1[$.
2. Montrer que g est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$ et calculer $g'(x)$ de deux façons différente.
   indication : $u = xt$ pour une des deux méthodes.

Exercice 59 *[Solution]*
Calculer (en dérivant) : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 60 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$

1. Déterminer le domaine de définition D de f et montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur D
2. Calculer f' puis f.
   indication : Pour trouver la constante d'intégration, on peut faire une IPP (en primitivant $\cos(xt)$*)*

Exercice 61 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\operatorname{sh} t}{t}\, t.$

1. Déterminer l'ensemble de définition de g.
2. Montrer que g est de classe $\mathbb{C}^1$ et calculer $g'(x)$.
3. Déterminer la limite de la suite $(g(n))_{n\geqslant 0}$
4. En déduire la valeur de $g(x)$

Exercice 62 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \sin(xt)\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
3. Calculer φ' puis φ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 63 **(CCP PSI 2013)** *[Solution]*
Après avoir démontré son existence, calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t$, sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (on pourra montrer que F est dérivable).

Exercice 64 **(Mines-Télécom PSI 2017)** *[Solution]*
Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^1 t^x \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que g est définie sur $D =]-1, +\infty[$.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et en trouver une expression simple.

Exercice 65 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*
Existence et calcul de $T(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}-1}{t} e^{-t}\,\mathrm{d}t.$

Exercice 66 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Solution]*
On considère $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x + \operatorname{ch} t}.$

1. Montrer que f définie sur $]-1, +\infty[$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Montrer l'existence et déterminer la valeur de la limite de f en $+\infty$

Exercice 67 **(Mines-Ponts PC 2015)** *[Solution]*
Étudier le domaine de définition, la continuité et la dérivabilité de $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 t^x \ln(1-t)\,\mathrm{d}t.$

Exercice 68 **(ENSAM PSI 2018)** *[Solution]*
On pose $f_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x^2+t^2)^n}$, pour $n \geqslant 1$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f_n et calculer f_1.
2. Montrer que f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et trouver une relation entre f_{n+1} et f_n'.
3. Déterminer f_n.

Exercice 69 **(CCP PSI 2013)** *[Solution]*

1. Justifier la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$
2. Soient $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $F + G^2$ est constante.

3. Déterminer la limite de F en $+\infty$ et en déduire la valeur de I.

Exercice 70 (ENSAM PSI 2015) *[Solution]*

1. Continuité et dérivabilité de $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$?

2. Exprimer f en fonction de $g(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{+\infty} f$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 71 (CCINP PSI 2022) *[Solution]*

Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire

2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$

3. Vérifier, pour $x \neq 1$, $\dfrac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \dfrac{1}{1-x^2}\left(\dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{x^2}{1+x^2t^2}\right)$ et en déduire la valeur de $g'(x)$ pour $x \geqslant 0$.

4. Montrer que $g(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(1+x)$ pour $x \geqslant 0$.

5. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.

Exercice 72 (Centrale PC 2015) *[Solution]*

1. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. En déduire que, pour $x \in [0,1[$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$; calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}$.

Exercice 73 (CCINP PSI 2021) *[Solution]*

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$

1. Trouver le domaine de définition D de F.

2. Montrer que F est continue sur D.

3. Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur un domaine à préciser et, à l'aide d'un changement de variable, que $F'(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)t^x}{(1+t^x)^2}\left(\frac{1}{t^2} - 1\right)$
En déduire les variations de F.

4. Déterminer les limites de F en $+\infty$ et en 1.

Exercice 74 (Mines-Ponts PSI 2014) *[Solution]*

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $y > 0$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer F'.

2. En déduire la valeur de F.

Exercice 75 (Mines-Ponts PSI 2016) *[Solution]*

Soient $a, b > 0$ distincts et $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que F est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2+a^2}{x^2+b^2} + C$

3. Montrer que $F(x) = -\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} h'(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$ où $h(t) = \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ et en déduire la valeur de C.

Exercice 76 (ICNA PSI 2010) *[Solution]*

1. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\arctan(xt)}}{2+t^2}\,\mathrm{d}t$ est définie pour tout $x \geqslant 0$.

2. Montrer que $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}$ et calculer $f(0)$.

3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

Exercice 77 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Solution]*
Soient $x \in \mathbb{R}^+$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi t}{x+t}\right) \mathrm{d}t$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

2. Calculer $f(0)$ et $\lim\limits_{+\infty} f$

3. En utilisant les deux changements de variable $u = x + t$ puis $v = \dfrac{x\pi}{u}$, montrer que f est dérivable en 0.
indication : c'est sur $f'(x)$ qu'il faut faire ces chgt de variable

Exercice 78 **(Centrale PSI 2013)** *[Solution]*

1. Déterminer l'ensemble de définition et les variations de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} \mathrm{d}t$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition et déterminer la limite de f en 0.

3. f est-elle intégrable sur $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$?

Exercice 79 **(Mines-Ponts PSI 2013)** *[Solution]*

1. Montrer que F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt} \mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. Donner sa limite en $+\infty$.

3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, calculer F'' puis $F(0)$.

Exercice 80 **(Mines-Ponts PSI 2017)** *[Solution]*

1. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{\sqrt{t+t^3}} \mathrm{d}t$ est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Calculer la limite et déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 81 **(Centrale PC 2015)** *[Solution]*

1. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{(1+t^2)^2} \mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2} \mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
indication : relier g à f'.

Exercice 82 **(AADN PSI 2009)** *[Solution]*
Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t} \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^2$. Calculer f'' puis f.

Exercice 83 **(Centrale PSI 2016)** *[Solution]*

1. Montrer que f, définie pour $x > 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt}}{1+t^2} \mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^2$.

2. Trouver un équivalent de f en $+\infty$, puis en 0.
indication : poser $g(x) = xf(x)$, la limite de g en $+\infty$ se calcule avec le TCD. Pour l'équivalent en 0 : montrer que $g''(x) + \dfrac{1}{x}$ converge en 0 puis que $g'(x) + \ln(x)$ converge en 0 avant de revenir à $g(x)$.

Exercice 84 **(ENSAM PSI 2007)** *[Solution]*
Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} \mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Calculer $f(0)$, $f(x)$ et la limite de f en $+\infty$.

Exercice 85 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*

1. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1} \mathrm{d}t$ existe pour $x \in D =]-1, +\infty[$.

2. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur D.

Exercice 86 **(Mines-Télécom PSI 2018)** *[Solution]*
Calculer, pour $x > 0$, $I(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t + x \sin^2 t}$ et $J(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{(\cos^2 t + x \sin^2 t)^2} \mathrm{d}t$; on pourra poser $u = \tan(t)$ pour calculer $I(x)$.

Exercice 87 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*
Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt^2)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $F^{(n)}(0)$. F est-elle DSE ?

Exercice 88 **(CCP PSI 2010)** *[Solution]*
Soit f continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$; on pose $F(x) = \left(\displaystyle\int_0^1 (f(t))^x\,\mathrm{d}t\right)^{1/x}$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^1 (f(t))^x\,\mathrm{d}t$. Calculer $\dfrac{1}{x}(\ln G(x) - \ln G(0))$ et en déduire que F admet une limite en 0 à déterminer.

V Équations différentielles

Exercice 89 **(Mines-Télécom PSI 2019)** *[Solution]*

1. Énoncer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres
2. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{ch}(xt)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Trouver une équation différentielle vérifiée par f est la valeur de $f(x)$ en fonction de $f(0)$.

Exercice 90 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*
Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable et vérifie une équation différentielle du premier ordre sur $\mathbb{R}$.
3. Résoudre cette équation et en déduire une expression simple de f ; on donne $f(0) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Exercice 91 **(CCP PSI 2018)** *[Solution]*
Soit $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(2xt)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(t)$.
3. Déterminer $f(t)$ sachant $f(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
4. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f^{(n)}(t)$.

Exercice 92 **(CCP MP 2015)** *[Solution]*
Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f vérifie sur $\mathbb{R}^{+*}$ une équation différentielle d'ordre 1.
2. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 93 **(Centrale PSI 2019)** *[Solution]*

1. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
3. En déduire la valeur de f ; on donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 94 **(CCP PC 2015)** *[Solution]*
Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $F(x)$ n'existe que pour $x > 0$ et déterminer la limite de F en $+\infty$.
2. Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $2xF(x) - F'(x) = \dfrac{2}{x}$.
   En déduire que F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3. Montrer que $F(x)=2e^{x^2}\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$ et en déduire que $F(x)\underset{x\to 0}{\sim}-2\ln(x)$.

Exercice 95 **(ENSAM PSI 2013)** *[Solution]*

1. Montrer que $g(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.
2. Trouver une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par g et en déduire que, pour $x>0$, on a : $g(x)=\cos(x)\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t-\sin(x)\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 96 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Solution]*

Soit $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $y''+y=\dfrac{1}{x}$
3. Montrer que f est l'unique solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de cette équation différentielle, telle que $\lim\limits_{+\infty} y=0$

Exercice 97 **(CCP PSI 2010 partiel)** *[Solution]*

Montrer que $f(x)=\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(x\cos t)\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^\infty$ et calculer $xf''(x)+f'(x)+xf(x)$.

Exercice 98 **(CCP PSI 2009)** *[Solution]*

1. Montrer que f définie par $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (sur ?).
2. Montrer qu'il existe une constante c telle que $f(x)=\dfrac{c-\ln x}{x}$. (on pourra étudier $f(x)+xf'(x)$)

Exercice 99 **(CCP PSI 2011)** *[Solution]*

1. Trouver l'ensemble de définition D de $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(xt)}{t^2\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que f est continue sur D puis qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$.
3. Montrer qu'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que, pour $x>0$, $f(x)-f''(x)=ax+b$ (on ne cherchera pas à calculer a) puis calculer f.

Exercice 100 **(ENSEA-ENSIIE PSI 2014)** *[Solution]*

Soit $F(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Exprimer $F(t)$ en fonction de $\theta(t)=\displaystyle\int_0^t e^{-v^2}\,\mathrm{d}v$; on donne $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (*trouver une équation différentielle d'ordre* 1 *vérifiée par* F.)

Exercice 101 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*

Soit $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

   indication : commencer par montrer que pour $\varepsilon>0$, $|f(x)|\leqslant 2\sqrt{\varepsilon}+\dfrac{1}{\varepsilon\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ *avec une IPP.*
3. Déterminer f à l'aide de fonctions usuelles (et de $f(0)$).

Exercice 102 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*

1. Montrer que $F_k(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-kt}\sin\left(xe^t\right)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ pour $k\in\mathbb{N}^*$.
2. Montrer que pour $k\geqslant 2$, F_k est solution de $xy'-ky=-\sin(x)$.

VI Autres

Exercice 103 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*

1. Étudier et représenter $f(x) = \int_0^{\pi/4} e^{-x\tan(t)}\,\mathrm{d}t$
2. Étudier (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
3. f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^-$? et sur $\mathbb{R}^+$?

Solutions

Exercice 1 *[sujet]* TCD à chaque fois

1. $\left|\dfrac{\cos\frac{t}{n}}{1+t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ donc limite $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}$.

2. $\left|\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-n}x^{-\frac{1}{n}}\right| \leqslant \begin{cases}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{-2} & \text{si } x\geqslant 1\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x\in]0,1[\end{cases}$ si $n\geqslant 2$ donc limite $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}\,\mathrm{d}x=1$.

3. On prolonge par 0 sur $]n,+\infty[$ puis $|f_n(x)|\leqslant e^{-x}$ donc limite $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}\,\mathrm{d}t=1$.

4. $\left|x^n\dfrac{\ln x}{(1-x^2)^{1/4}}\right|\leqslant\dfrac{|\ln x|}{(1-x^2)^{1/4}}$ donc limite $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{(1-x^2)^{1/4}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 2 *[sujet]* $\left|\dfrac{1}{1+x^2+x^ne^{-x}}\right|\leqslant\dfrac{1}{1+x^2}$ donc limite $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$.

Exercice 3 *[sujet]* 1. $f(t)\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$ et $f(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{\pi}{2t^\alpha}$ donc f_α est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si $\alpha\in]1,2[$.

2. $|f_n(t)|\leqslant f_{3/2}$ donc limite $\displaystyle\int_0^1\frac{\arctan t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$

Exercice 4 *[sujet]* 1. Étude de fct

2. $\dfrac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)}\xrightarrow[t\to 0]{}\dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)}\underset{t\to+\infty}{=}O\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$ donc I_n existe.

3. $|I_n|\leqslant\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ (qui existe) par Q1 donc $\lim I_n=0$. Puis par TCD, $nI_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}$ car $\left|\dfrac{n\sin(t/n)}{t(1+t^2)}\right|\leqslant\dfrac{1}{1+t^2}$ par Q1

Exercice 5 *[sujet]* 1. $\dfrac{\sin(nx)}{1+n^4x^3}\underset{x\to+\infty}{=}O\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

2. Poser $t=xn^{4/3}$

3. Par TCD avec $|f_n(t)|\leqslant\dfrac{t}{1+t^3}$ ($|\sin(u)|\leqslant|u|$)

4. Ajouter les 2 valeurs de K puis $2K=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1-t+t^2}=\frac{4}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]_0^{+\infty}$

5. facile

Exercice 6 *[sujet]* 1. $\dfrac{\arctan(nt)}{(1+n^4t^2)^2}\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{\pi}{2n^8t^4}$

2. $\lim I_n=0$ par TCD avec $\left|\dfrac{\arctan(nt)}{(1+n^4t^2)^2}\right|\leqslant\dfrac{\pi/2}{(1+t^2)^2}$ puis $I_n\overset{u=n^2t}{=}\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(u/n)}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u$ donc $\lim n^3I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u=1$ par TCD avec $\left|\dfrac{\arctan(u/n)}{(1+u^2)^2}\right|\leqslant\dfrac{\pi/2}{(1+u^2)^2}$

Exercice 7 *[sujet]* 1. fct continue sur $[0,1]$

2. $0\leqslant I_n\leqslant\displaystyle\int_0^1x^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}$ donc $\lim I_n=0$ (ou par TCD en dominant par 1) ; on pose $u=x^n$: $nI_n=\displaystyle\int_0^1\frac{u^{1/n}}{1+u^{1/n}+u^{2/n}}\,\mathrm{d}u\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{3}=\frac{1}{3}$ par TCD avec $\left|\dfrac{u^{1/n}}{1+u^{1/n}+u^{2/n}}\right|\leqslant 1$.

Exercice 8 *[sujet]* 1. $\ln(x)\ln(1-x^n)\underset{x\to 0}{=}o(\ln x)$ et $\ln(x)\ln(1-x^n)\underset{x\to 1}{\sim}(x-1)\ln(1-x^n)\xrightarrow[x\to 1]{}0$.

2. $|\ln(x)\ln(1-x^n)|=|\ln x|\times(-\ln(1-x^n))\leqslant|\ln x|\times(-\ln(1-x))$ donc $\lim I_n=0$.

3. $I_n\overset{u=x^n}{=}\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\int_0^1\frac{\ln u\ln(1-u)}{u}u^{1/n}\,\mathrm{d}u$ puis $\left|\dfrac{\ln u\ln(1-u)}{u}u^{1/n}\right|\leqslant\dfrac{\ln u\ln(1-u)}{u}$ qui est intégrable sur $]0,1[$ (car $\underset{u\to 0}{\sim}\ln u$ et $\xrightarrow[u\to 1]{}0$) donc $I_n\sim\dfrac{C}{n^2}$ avec $C=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln u\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u>0$.

Exercice 9 *[sujet]* **1.** $\operatorname{sh} x = 1 \overset{X=e^x}{\Leftrightarrow} X^2 - 2X - 1 = 0 \Leftrightarrow X = 1 + \sqrt{2}$ car $X = e^x > 0$

2. $\lim I_n = 0$ par TCD car $|\operatorname{sh}^n t| \leqslant 1$ sur $[0, \alpha]$

3. IPP

4. (I_n) est décroissante donc $(2n-1)I_n \leqslant nI_n + (n-1)I_{n-2} \leqslant (2n-1)I_{n-2}$ puis $I_n \sim \dfrac{1}{n\sqrt{2}}$

Exercice 10 *[sujet]* **1.** $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^n}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $[0, x]$ (ou $[x, 0]$)

2. Par TCD (sur $[0, x]$), $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(x) = 0$ car $\left|\dfrac{1}{\operatorname{ch}^n t}\right| \leqslant 1$; la CV est uniforme car $\|I_n\|_\infty = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}^n t} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par TCD avec $\left|\dfrac{1}{\operatorname{ch}^n t}\right| \leqslant \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$ pour $n \geqslant 1$

3. $I_{n+2}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^{n+2} t}\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} I_n(x) - \left[\operatorname{sh} t \frac{-1}{(n+1)\operatorname{ch}^{n+1} t}\right]_0^x - \frac{1}{n+1} I_n(x)$

4. $I = I_1(\ln 2) - I_3(\ln 2)$ puis I_1 se calcule en posant $u = e^x$

Exercice 11 *[sujet]* **1.** $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = 1$ et $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

2. $|f_n(x)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}$ car $|\sin(nx)| \leqslant nx$ donc $\lim u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 12 *[sujet]* **1.** (f_n) CS vers $e^{-t}\ln(t)$ (forme exponentielle et DL)

2. $|f_n(t)| \leqslant |\ln(t)| e^{-(n-1)\frac{t}{n}} \leqslant |\ln(t)| e^{-t/2}$ si $n \geqslant 2$

3. $\displaystyle\int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t = n\ln(n)\int_0^1 (1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u + n\int_0^1 (1-u)^{n-1}\ln(u)\,\mathrm{d}u$ puis $n\ln(n)\displaystyle\int_0^1 (1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u = \ln(n)$ et $n\displaystyle\int_0^1 (1-u)^{n-1}\ln(u)\,\mathrm{d}u \overset{\text{IPP}}{=} -\int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u}\,\mathrm{d}u = -\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 (1-u)^k\,\mathrm{d}u = -H_n$.

Exercice 13 *[sujet]* **1.** (f_n) CS sur $\mathbb{R}^+$ vers $x \mapsto e^{-x}\sin(x)$

2. $\lim v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ par TCD avec $|f_n(x)| \leqslant e^{-x}|\sin x| \leqslant e^{-x}$

3. a) $x \mapsto \ln(1+x) - x$ croît sur $]-1, 0]$ et décroît sur $\mathbb{R}^+$

b) Si $x \in [0, n]$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant e^{-x} - e^{n\ln(1-x/n)} \leqslant 1 - e^{x + n\ln(1-x/n)}$ donc $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 1 - e^{n^{1/4} + n\ln(1-n^{-3/4})}$ sur $[0, n^{1/4}]$. Si $x \geqslant n^{1/4}$ alors $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2e^{-x} \leqslant 2e^{-n^{1/4}}$. En regroupant les deux, on a $\|f_n - f\|_\infty \leqslant 2e^{-n^{1/4}} + \left(1 - e^{n^{1/4} + n\ln(1-n^{-3/4})}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Exercice 14 *[sujet]* **1.** f_0 n'est pas $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $\lim\limits_{t\to\frac{3\pi}{2}^-} f_0(t) = +\infty$; $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{n-1}}$ n'est intégrable sur $[1, +\infty[$ que pour $n \geqslant 3$ (et l'intégrale DV si f_n n'est pas intégrable car $f_n \geqslant 0$ au voisinage de $+\infty$). Enfin $\lim\limits_0 f_n = 1$ si $n \geqslant 3$.

2. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ par $|f_n(t)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{t}{t^3 - 1} & \text{si } t \geqslant 1 \\ \dfrac{t}{\sin(t)} & \text{si } t \in]0,1[\end{cases}$

3. $n(I_n - I) \overset{u=t^n}{=} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u^{2/n-1}}{u + \sin(u^{1/n})}\,\mathrm{d}u - \int_0^1 \frac{u^{1/n}}{\sin(u^{1/n})(u + \sin(u^{1/n}))}\,\mathrm{d}u$ puis par $\left|\dfrac{u^{2/n-1}}{u + \sin(u^{1/n})}\right| \leqslant \dfrac{u^{2/3-1}}{u-1)}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u^{2/n-1}}{u + \sin(u^{1/n})}\,\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(u + \sin(1))}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{1/n}}{\sin(u^{1/n})(u + \sin(u^{1/n}))}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sin(1)(u + \sin(1))}$ par $\left|\dfrac{u^{1/n}}{\sin(u^{1/n})(u + \sin(u^{1/n}))}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sin(u^{1/3})(u + \sin(u^{1/3}))}$ puisque sin est croissante sur $[0, 1]$.

Exercice 15 *[sujet]* On pose $u = t^n$: $nu_n = \displaystyle\int_0^1 u^{1/n} f(u^{1/n})\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 1f(1)\,\mathrm{d}u = f(1)$ par TCD et continuité de f en 1 avec $\left|u^{1/n} f(u^{1/n})\right| \leqslant \|f\|_\infty$ car f est continue sur le segment $[0, 1]$ donc bornée.

Exercice 16 *[sujet]* $n\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \overset{u=t^n}{=} \int_0^1 u^{1/n} f(u^{1/n})\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(1=)\,\mathrm{d}u = f(1)$ car $|u^{1/n} f(u^{1/n})| \leqslant \|f\|_\infty$.

Exercice 17 *[sujet]* On complète par 0 sur $]n,+\infty[$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{x+1}{x^n e^x+x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ car $|f_n(x)| \leqslant \begin{cases} \frac{x+1}{x^2+x+1} & \text{si } x\leqslant 1\\ \frac{x+1}{e^x+x^2+x+1} & \text{si } x>1\end{cases}$

Exercice 18 *[sujet]* On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{x^{n+2}+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ car $\left|\frac{x^n}{x^{n+2}+1}\right| \leqslant \begin{cases} 1 & \text{si } x\in[0,1]\\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x>1\end{cases}$

Exercice 19 *[sujet]* $\lim u_n = 0$ car $|\exp(-x^n)| \leqslant e^{-x}$ puis $u_n \overset{u=x^n}{=} \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} e^{-u}u^{1/n-1}\,du$ donc $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du = C>0$ car $\left|e^{-u}u^{1/n-1}\right| \leqslant e^{-u}$ donc $u_n \sim \frac{C}{n}$ (positif) et $\sum u_n$ DV.

Exercice 20 *[sujet]* **1.** $\frac{1-\cos^n x}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{n}{2}$ et $\frac{1-\cos^n x}{x^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

2. on pose $x=\sqrt{\frac{2t}{n}}$

3. $\lim\limits_0 \frac{\ln(\cos t)}{t^2} = -\frac{1}{2}$

4. on trouve la limite de (v_n) par TCD : si $f_n(t) = \frac{1-\cos^n\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)}{t\sqrt{t}}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = \frac{1-e^{-t}}{t\sqrt{t}}$. Reste la domination : si $t\geqslant 1$ alors $|f_n(t)| \leqslant \frac{2}{t\sqrt{t}}$; si $t<1$ alors $\sqrt{\frac{2t}{n}} \in \left[0,\sqrt{\frac{2}{n}}\right] \subset [0,\alpha]$ si $n\geqslant n_0$ (n_0 ne dépend pas de t) et $\cos^n\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right) = \exp\left[n\ln\cos\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)\right] \geqslant \exp\left[-2n\frac{2t}{n}\right] = e^{-4t}$. On a donc $|f_n(t)| = f_n(t) \leqslant \frac{1-e^{-4t}}{t\sqrt{t}}$ sur $]0,1]$ si $n\geqslant n_0$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x}}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \overset{\text{IPP}}{=} \frac{2}{3}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \overset{x=t^2}{=} \frac{2}{3}\sqrt{\pi}$. Au final, $u_n \sim \frac{\sqrt{\pi n}}{3\sqrt{2}}$

Exercice 21 *[sujet]* **1.** cours

2. il suffit que $\cos(\varphi_n) = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$ et $\sin(\varphi_n) = -\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$ donc φ_n est un argument du complexe $a_n - ib_n$ (qui est non nul)

3. On a $I_n = (a_n^2+b_n^2)\left(\frac{d-c}{2} + \left[\frac{\sin(2nx+2\varphi_n)}{4n}\right]_c^d\right)$ donc $\lim I_n = \frac{(d-c)(a_n^2+b_n^2)}{2}$ ce qui donnera la minoration à partir d'un certain rang ($1/2 > 1/4$!)

4. Si (a_n) ou (b_n) ne tend pas vers 0, la minoration précédente prouve que (I_n) ne tend pas vers 0, ce qui est absurde car $|a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)| \leqslant K$ (car (a_n) et (b_n) sont bornée) donc le TCD donne $\lim I_n = 0$.

Exercice 22 *[sujet]* Proche des intégrales de Wallis

1. CSSA avec $0 \leqslant a_n \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}$

2. $a_{n+2} \overset{\text{IPP}}{=} \frac{2}{3}(n+1)\int_0^1 t^n(1-t^2)^{3/2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}(n+1)(a_n - a_{n+2})$

3. On prouve $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ en utilisant le TCD appliqué à $S_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\sqrt{1-t^2}\,t^k$ car le TITT est plus difficile à appliquer (la CVA de $\sum a_n$ n'est pas évidente) : on a $|S_n(t)| = \sqrt{1-t^2}\left|\frac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}\right| \leqslant \frac{2\sqrt{1-t^2}}{1+t}$ ce qui permettra de conclure

Exercice 23 *[sujet]* Si $x>0$, on a $\frac{x}{\mathrm{ch}(x)} = 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x e^{-(2n+1)x}$ puis TITT avec $\int_0^{+\infty}\left|xe^{-(2n+1)x}\right|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2n+1)^2}$

Exercice 24 *[sujet]* **1.** $n^{-n} \leqslant \frac{1}{n^2}$ si $n\geqslant 2$ et $\lim\limits_0 e^{x\ln(x)} = 1$

2. IPP successives $\in_0^1 f_{n,p}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n\frac{n!}{(p+1)^n}$

3. TITT avec $e^{x\ln(x)} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n(\ln x)^n}{n!}$

Exercice 25 *[sujet]* $t^{t^x} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(t^x \ln t)^n}{n!}$ et on applique le TITT avec $\int_0^1 \frac{|t^x \ln t|^n}{n!}\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^1 \frac{(t^x \ln t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} (-1)^{n+1}\frac{1}{(n-1)!(xn+1)}\int_0^1 t^{xn}(\ln t)^{n-1}\,\mathrm{d}t = \cdots = \frac{1}{(xn+1)^{n+1}}$

Exercice 26 *[sujet]* Par TCD avec $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} t^{b-1}(-1)^k t^{ka}$ et $|S_n(t)| = t^{b-1}\frac{1-(-1)^{n+1}t^{(n+1)a}}{1+t^a} \leqslant \frac{2t^{b-1}}{1+t^a}$

Exercice 27 *[sujet]* $\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ et par TITT la somme de la série vaut aussi $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$.

Exercice 28 *[sujet]* $\frac{t^{\alpha-1}}{1+t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-\alpha}}$ puis $\frac{t^{\alpha-1}}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{\alpha+n-1}$ si $t \in]0,x]$ et on applique le TITT ($x<1$ fixé) avec $\int_0^x \left|(-1)^n t^{\alpha+n-1}\right|\,\mathrm{d}t = \frac{x^{\alpha+n}}{\alpha+n}$. La dernière somme s'obtient avec $\alpha = \frac{1}{3}$ et $x = \frac{1}{2}$ (poser $u = t^{1/3}$ pour calculer l'intégrale)

Exercice 29 *[sujet]* **1.** $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

2. $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{t}e^{-nt}$ puis TITT (chgt de variable pour le calcul des intégrales)

Exercice 30 *[sujet]* $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^x-1} = 0$ et $\frac{x^2}{e^x-1} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc J existe. Pour $x>0$, $\frac{x^2}{e^x-1} = \sum_{n\geqslant 1} x^2 e^{-nx}$ puis on applique le TITT avec $f_n(x) = x^2e^{-nx} \geqslant 0$ et $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n^3}$ par deux IPP.

Exercice 31 *[sujet]* **1.** $\frac{x}{\operatorname{sh} x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ et $\frac{x}{\operatorname{sh} x} \underset{+\infty}{\sim} 2xe^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

2. $\frac{x}{\operatorname{sh} x} = \frac{2xe^{-x}}{1-e^{-2x}} \overset{x\geq 0}{=} 2\sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-(2n+1)x}\,\mathrm{d}x$ puis TITT (H4) $\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x \overset{\text{IPP}}{=} \frac{2}{(2n+1)^2}$

Exercice 32 *[sujet]* Si $t>0$, $\frac{\sin t}{\operatorname{sh} t} = \sum_{n\geqslant 0} 2\sin(t)e^{-(2n+1)t}$ puis TITT avec $\int_0^{+\infty} |\sin(t)e^{-(2n+1)t}|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} te^{-(2n+1)t}\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{(2n+1)^2}$

Exercice 33 *[sujet]* **1.** $\frac{\ln(1-t^2)\ln(t)}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t)$ et $\frac{\ln(1-t^2)\ln(t)}{t^2} \xrightarrow[t\to 1]{} 0$ donc I existe.

2. On applique le TITT avec $\frac{\ln(1-t^2)\ln(t)}{t^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{2n-2}\ln(t)}{n}$ pour $t \in]0,1[$ et $\int_0^1 t^{2n-2}\ln(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Pour le calcul, comme $\frac{1}{n(2n-1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n-1} + \frac{2}{(2n-1)^2}$, on trouve $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(2k-1)^2} = 2H_n - 2H_{2n} + 2\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{4} - 2\ln(2)$ en utilisant $H_n = \ln(n) + \gamma + 0(1)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 34 *[sujet]* **1.** On vérifie $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum a_n$ CV, (b_n) CV vers l donc $n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda = e^l > 0$.

2. a) $\lim_{t\to 0}\frac{1-(1-t)^x}{t} = x$ et $\frac{1-(1-t)^x}{t} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{-1}{(1-t)^{-x}}$

b) Pour $t\in]0,1[$, $(1-t)^x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}t^n$ donc $\frac{1-(1-t)^x}{t}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}t^{n-1}$ puis on applique le TITT avec $u_n=\int_0^1|f_n(t)|\,\mathrm{d}t=\frac{(-x)(1-x)\dots(n-x-1)}{n\times n!}$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{x+2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $u_n\sim\frac{\lambda}{n^{x+2}}$ et $x+2>1$.

Exercice 35 *[sujet]* **1.** $\frac{\sin\alpha x}{e^x-1}\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{e^x-1}=\alpha$

2. $\frac{\sin\alpha x}{e^x-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\alpha x e^{-nx}$ si $x>0$ puis TITT avec $\int_0^{+\infty}\left|\sin\alpha x e^{-nx}\right|\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}|\alpha|xe^{-nx}\,\mathrm{d}x=\frac{|\alpha|}{n^2}$ et enfin on calcule $\int_0^{+\infty}\sin\alpha x e^{-nx}\,\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{-(n-i\alpha)x}\,\mathrm{d}x\right)=\frac{\alpha}{n^2+\alpha^2}$

3. Par comparaison à une intégrale I équivaut à $\int_0^{+\infty}\frac{\alpha\,\mathrm{d}t}{\alpha^2+t^2}$ quand α tend vers $+\infty$ puis $\lim_{\alpha\to+\infty}I(\alpha)=\frac{\pi}{2}$

Exercice 36 *[sujet]* **1.** $|f_n(x)|\leqslant|a_n|\frac{b^n}{n!}e^{-a}\underset{n\to+\infty}{=}o(|a_n|)$ donc CN sur tout segment de $\mathbb{R}^+$

2. Par TITT avec $\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,\mathrm{d}t\overset{\text{IPP}}{=}|a_n|$, on trouve $\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$

Exercice 37 *[sujet]* **1.** $\frac{(\ln t)^2}{1+t^2}\underset{t\to0}{=}o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc l'intégrale de gauche CV et vaut celle de droite par $u=\frac{1}{t}$.

2. Si $t\in]0,1[$ alors $\frac{(\ln t)^2}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\ln t)^2t^{2n}$ puis TITT avec $\int_0^1\left|(-1)^n(\ln t)^2t^{2n}\right|\,\mathrm{d}t\overset{\text{IPP}}{=}\frac{2}{(2n+1)^3}$

Exercice 38 *[sujet]* **1.** couper en 2 par linéarité et poser $u=at$ dans la première intégrale et $u=bt$ dans la seconde

2. on suppose $b>a$ et on a $\left|\int_{ax}^{by}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant(b-a)y\frac{e^{-ay}}{ay}\xrightarrow[y\to+\infty]{}0$.

Pour la seconde : $g:t\mapsto\frac{e^{-t}-1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 donc bornée sur $]0,1]$ et on a, pour $bx\leqslant1$, $\left|\int_{ax}^{bx}\frac{e^{-t}-1}{t}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\|g\|_\infty^{]0,1]}(b-a)x\xrightarrow[x\to0]{}0$ donc $\lim_{x\to0}\int_{ax}^{bx}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to0}\int_{ax}^{bx}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln\frac{b}{a}$. En faisant tendre x vers 0 et y vers $+\infty$ (après avoir prouvé l'existence de l'intégrale), on trouve $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t=\ln\frac{b}{a}$.

3. $|e^{-t}|<1$ donc $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers $f:t\mapsto\left(1-\frac{1-e^{-t}}{t}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-(n+1)t}=\left(1-\frac{1-e^{-t}}{t}\right)\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}$

4. $\int_0^{+\infty}f_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(n+1)t}-e^{-(n+2)t}}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$.
On a donc $\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,\mathrm{d}t=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (car $f_n\geqslant0$) donc le TITT s'applique

Exercice 39 *[sujet]* **1.** $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ et $o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$

2. Le TITT ne s'applique pas car la série à trouver n'est pas ACV. $f(t)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos(t)e^{-(k+1)t}$ puis $\int_0^{+\infty}\cos(t)e^{-(k+1)t}\,\mathrm{d}t=\frac{(k+1)}{1+(k+1)^2}$ et on termine avec le TCD : $|S_n(t)|=\left|\frac{\cos(t)(1-(-1)^{n+1}e^{-(n+1)t}}{1+e^t}\right|\leqslant\frac{2|\cos(t)|}{1+e^t}$

Exercice 40 *[sujet]* **1.** CV par CSSA mais pas ACV car $\frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n}$

2. On applique le TCD à $S_n(t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^ke^{-(2k+1)t}\cos(xt)=e^{-t}\frac{1-(-1)^{n+1}e^{-(2n+2)t}}{1+e^{-2t}}\cos(xt)$ donc $|S_n(t)|\leqslant\frac{2e^{-t}}{1+e^{-2t}}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On termine avec $\int_0^{+\infty}e^{-(2k+1)t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t=\frac{2k+1}{(2k+1)^2+x^2}$.

Exercice 41 *[sujet]* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^{\pi/2} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cos^k(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t}$ par TCD en utilisant la majoration $\displaystyle |S_n(t)| = \left|\frac{1-(-1)^{n+1}\cos(n+1)t}{1+\cos t}\right| \leqslant \frac{2}{1+\cos t}$. On trouve $\displaystyle S = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{2\cos^2 t/2} = \left[\tan\frac{t}{2}\right]_0^{\pi/2} = 1$

Exercice 42 *[sujet]* **1.** par CSSA, on a $|R_n(x)| \leqslant e^{-\lambda_{n+1}a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ donc CVUTS et S est continue. De plus $|S(x)| \leqslant e^{-\lambda_0 x}$ et $\lambda_0 > 0$ donc S est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$

2. On applique le TCD à $\displaystyle S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-\lambda_k t}$ avec $|S_n(t)| = |S(t) - R_n(t)| \leqslant |S(t)| + |R_n(t)| \leqslant e^{-\lambda_0 t} + e^{-\lambda_{n+1} t} \leqslant 2e^{-\lambda_0 t}$

Exercice 43 *[sujet]* **1.** $\displaystyle \|f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n^2}$ donc CN sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$

2. Par CSSA $\displaystyle |f(x)| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$ donc (avec la continuité précédente), f est intégrable sur $\mathbb{R}$. On applique le TCD à $\displaystyle R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+t^2}$: par CSSA, on a $\displaystyle |R_n(t)| \leqslant \frac{1}{(n+1)^2+x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$ donc $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} R_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$ ce qui donne par linéarité de l'intégrale sur la somme partielle de la série (donc une somme finie) $\displaystyle \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{n^2+x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$

Exercice 44 *[sujet]* **1.** $\displaystyle F(t) = \frac{\sin(\pi t)}{1-t}$; pas de CU car $\displaystyle R_n(t) = \frac{t^{n+1}\sin(\pi t)}{1-t}$ donc $R_n(1-1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi e^{-1}$ donc $(\|R_n\|_\infty)$ ne tend pas vers 0

2. TITT avec $\displaystyle \int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n \sin(\pi t)\,\mathrm{d}t \overset{2\text{ IPP}}{\leqslant} \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(2 + \int_0^1 t^{n+2}\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{3}{(n+1)(n+2)}$; on en déduit $\displaystyle \sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{1-t} \overset{x=\pi(1-t)}{\mathrm{d}} t = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 45 *[sujet]* **1.** $\displaystyle 0 \leqslant u_n \leqslant \pi \int_0^\pi x^n(1-x)\,\mathrm{d}x = \pi\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

2. Par TITT avec $\displaystyle \int_0^\pi |x^n \sin(\pi x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \pi \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ puis changement de variable $u = \pi x$.

Exercice 46 *[sujet]* $\displaystyle \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t \overset{\text{TITT}}{=} \sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 -t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Exercice 47 *[sujet]* — Si I CV alors $\displaystyle \sum_{k=0}^{n} u_k \overset{\text{somme finie}}{=} \int_0^1 f(t)\frac{1-t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t$ et comme $f \geqslant 0$, $\displaystyle f(t)\frac{1-t^{n+1}}{1-t} \leqslant \frac{f(t)}{1-t}$ donc $\displaystyle \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant I$ donc la série CV (SATP dont les somme partielles sont majorées)

— Si $\sum u_n$ CV alors $\displaystyle \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} f(t)t^n\,\mathrm{d}t$ que l'on peut intégrer terme à terme sur le segment $[0,x]$ si $|x| < 1$ par CVN car $|f(t)t^n| \leqslant \|f\|_\infty x^n$. On a donc $\displaystyle \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x f(t)t^n\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (car $f \geqslant 0$) donc I CV (intégrale d'une fonction positive dont une primitive est majorée)

En cas de CV, on a $\displaystyle I = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ par TITT (et H4 est la CV de $\sum u_n$ car $f \geqslant 0$).

Exercice 48 *[sujet]* **1.** Par $\displaystyle \left|\frac{1}{1+t^3+x^3}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^3}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

2. $\displaystyle \frac{1}{1+t^3} = \frac{1/3}{1+t} + \frac{-1/3t+2/3}{1-t+t^2} = \frac{1/3}{1+t} - \frac{1}{6}\frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)}$ donc $\displaystyle f(0) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

3. Si (x_n) tend vers $+\infty$ alors par TCD (même domination) $f(x_n)$ tend vers 0

Exercice 49 *[sujet]* **1.** Fait en cours (fonction Γ)

2. f est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$ (car $t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue positive et non nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$) donc $\ln\circ f$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\varphi'(x)=\ln f(x)-\ln f(x-1)=x-1\geqslant 0$ car $f(x+1)=xf(x)$ (IPP, fait en cours). On en déduit que (v_n) est une suite croissante.
Reste à vérifier que $\lim v_n=+\infty$ pour conclure avec le CSSA : pour $x\geqslant 2$, on a $\varphi'(x)\geqslant 1$ donc (IAF) $\varphi(x)-\varphi(2)\geqslant (x-2)$ ce qui donne $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$ donc (v_n) tend vers $+\infty$ et $\sum\dfrac{(-1)^n}{v_n}$ CV par CSSA.

Exercice 50 *[sujet]* **1.** $g(x,t)=\dfrac{1}{t^x(1+t)}\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{1}{t^x}$ et $g(x,t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^{x+1}}$ donc $D=]0,1[$.

2. $|g(x,t)|\leqslant\begin{cases}\dfrac{1}{t^b(1+t)} & \text{si } t\leqslant 1\\ \dfrac{1}{t^a(1+t)} & \text{si } t>1\end{cases}$ si $x\in[a,b]\subset D$.

3. Poser $u=\dfrac{1}{t}$.

4. $f(x)\geqslant\displaystyle\int_0^1 g(x,t)\,\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^x}=\frac{1}{2(1-x)}\xrightarrow[x\to 1]{}+\infty$; idem en 0 avec $f(x)=f(1-x)$.

Exercice 51 *[sujet]* **1.** Si $f(x,t)=\dfrac{te^{-xt}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t$, $f(x,t)\xrightarrow[t\to 0]{}1$ et $f(x,t)\underset{t\to+\infty}{\sim}te^{-(x+1)t}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $x>-1$ alors que si $x\leqslant -1$, $\lim\limits_{t\to+\infty}f(x,t)=+\infty$ donc $D_F=]-1,+\infty[$.

2. On a $0\leqslant f(x,t)\leqslant e^{-xt}$ donc pour $x>0$, $0\leqslant F(x)\leqslant\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ et $\lim\limits_{+\infty}F=0$.

3. $F(x-1)-F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}te^{-xt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x^2}$ et par télescopage, $F(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(F(x+n)-F(x+n+1))=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+x+1)^2}$

4. Par TITT avec $f(x,t)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}te^{-(x+n+1)t}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}|e^{-(x+n+1)t}|\,\mathrm{d}t=\frac{1}{(n+1+x)^2}$.

Exercice 52 *[sujet]* $t\mapsto g(x,t)=\exp\left[-\dfrac{1}{x}\ln(1-t^x)\right]$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $[0,1[$ si $x>0$; au voisinage de $t=1$, on a $t^x=e^{x\ln(t)}=e^{x((t-1)+o(t-1))}=1+x(t-1)+o(t-1)$ donc $ln(1-t^x)=\ln(x(1-t)+o(1-t))=\ln(1-t)+ln(x)+o(1)$ et $g(x,t)=\exp\left[-\dfrac{1}{x}\ln(1-t)-\dfrac{\ln x}{x}+o(1)\right]\sim\dfrac{x^{-1/x}}{(1-t)^{1/x}}$ donc $D_f=]1,+\infty[$.
Si (x_n) tend vers $+\infty$, $u_n(t)=g(x_n,t)=\exp\left[-\dfrac{1}{x_n}\ln(1-t^{x_n})\right]=\exp\left[\dfrac{1}{x_n}t^{x_n}(1+o(1))\right]\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ pour $t\in]0,1[$ donc (u_n) CS vers 1 et, avec $|u_n(t)|\leqslant 1$, par TCD, on a $f(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.

Exercice 53 *[sujet]* **1.** Pour la définition et la continuité : si $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*}$, on a $\left|e^{-xt}\arctan t\right|\leqslant\arctan(t)e^{-at}=\varphi(t)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $0\leqslant\varphi(t)\leqslant\dfrac{\pi}{e}^{-at}$ et $a>0$.

2. $f(x)\overset{u=xt}{=}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty}\arctan\left(\frac{u}{x}\right)e^{-u}\,du$ et on vérifie que $\lim\limits_{x\to 0}xf(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\pi}{2}e^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$ par TCD : si (x_n) est une suite tendant vers 0 alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\arctan\left(\dfrac{u}{x_n}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ si $u>0$ puis $\left|\arctan\left(\dfrac{u}{x_n}\right)e^{-u}\right|\leqslant e^{-u}$ donne la domination.

Exercice 54 *[sujet]* **1.** $\left|\dfrac{e^{-t^2}}{1+x^2t^2}\right|\leqslant e^{-t^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. Étudier $u\mapsto 1-u+u^2-\dfrac{1}{1+u}$ et $u\mapsto u^3-u^2+u-1+\dfrac{1}{1+u}$

3. $0\leqslant\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(1-x^2t^2+x^4t^4)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t-f(x)\leqslant x^6\int_{-\infty}^{+\infty}t^6e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ donc $f(x)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t-x^2\int_{\mathbb{R}}t^2e^{-t^2}\,\mathrm{d}t+x^4\int_{\mathbb{R}}t^4e^{-t^2}\,\mathrm{d}t+O(x^6)$

Exercice 55 *[sujet]* $\left|\dfrac{e^{-t}}{1+(xt)^2}\right|\leqslant e^{-t}$ permet de justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$; de plus f est paire et décroissante sur $\mathbb{R}^+$; on pose $u=xt$ (avec $x>0$) : $f(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u/x}}{1+u^2}\,du$ puis, si (x_n) tend vers $+\infty$, on a $x_nf(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\frac{\pi}{2}$ par TCD avec $\left|\dfrac{e^{-u/x_n}}{1+u^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{1+u^2}$

Exercice 56 *[sujet]* **1.** $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $]-x,x[$ et $\dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}} \underset{t\to x}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2x(1+x^2)}(x-t)^{1/2}}$ donc est intégrable sur $[0,x[$ et sur $]-x,0]$ par parité.

2. $f(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(1+(ux)^2)(1-u^2)}}$ et si (x_n) tend vers $+\infty$, on a $\left|\dfrac{1}{\sqrt{(1+(ux_n)^2)(1-u^2)}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ donc $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par TCD

3. Sous la seconde forme, f est continue en 0 par $\left|\dfrac{1}{\sqrt{(1+(ux)^2)(1-u^2)}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$. Pour le DSE, on part du DSE de $(1+u)^{1/2}$ pour obtenir $\dfrac{1}{\sqrt{(1+(ux)^2)(1-u^2)}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}}x^{2n}$ pour $|x|<1$ et $u \in]-1,1[$ et on applique le TITT : $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}}x^{2n}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}x^{2n}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u = \pi\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}x^{2n}$ qui est le terme général d'une série CV car $|x|<1$.

Exercice 57 *[sujet]* **1.** On a $L \subset E$ car, pour $s>0$ fixé, on a $|f(u)| \leqslant s\dfrac{|f(u)|}{u+s}$. Par contre les ensembles ne sont pas égaux puisque $u \mapsto \dfrac{1}{u} \notin L$ alors que $u \mapsto \dfrac{1}{u} \in E$ car $u \mapsto \dfrac{1}{u(u+s)}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ et équivalente à $\dfrac{1}{u^2}$ en $+\infty$.

2. $u \mapsto \dfrac{f_\alpha(u)}{s+u}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\dfrac{f_\alpha(u)}{s+u} \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u^{2-\alpha}}$ donc $f_\alpha \in E$ si et seulement si $\alpha>0$.

3. $\hat{f}_\alpha(s) \overset{u=st}{=} s^{\alpha-1}\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$

4. Pour $s \in [a,b] \subset \mathbb{R}+*$, on a $\left|\dfrac{f(u)}{s+u}\right| \leqslant \dfrac{|f(u)|}{u+a} = \varphi(u)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $a>0$ et $f \in E$, ce qui donne la continuité de $\hat{f}$.

Pour la limite en $+\infty$, on applique le TCD : si (s_n) tend vers $+\infty$ alors $\dfrac{f(u)}{s_n+u} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\left|\dfrac{f(u)}{s_n+u}\right| \leqslant \dfrac{|f(u)|}{1+u} = \varphi(u)$ car $x_n \geqslant 1$ à partir d'un certain rang. Comme φ est intégrable si $f \in E$, on en déduit (par caractérisation séquentielle de la limite) que $\displaystyle\lim_{s\to+\infty}\hat{f}(s) = 0$.

Exercice 58 *[sujet]* **1.** Si $|x|<1$, $t \mapsto f(x,t) = \dfrac{\ln(1+xt)}{t}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $]0,1]$ et $\displaystyle\lim_{t\to0} f(x,t) = x$ est finie.

2. Si $x \in [-a,a] \subset]-1,1[$ alors $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{1}{|1+xt|} \leqslant \dfrac{1}{1-at}$ donne $g'(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+xt} = \frac{\ln(1+x)}{x}$. Pour la deuxième méthode, avec $u=xt$, $g(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u$ donc g est la primitive nulle en 0 de $h : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ (car h est prolongeable par continuité en 0).

Exercice 59 *[sujet]* Si $f_1(x,t) = \dfrac{e^{-t}-e^{-tx}}{t}$ alors $t \mapsto f_1(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si $x>0$ (prolongeable par continuité en 0 et $o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$) et si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, on a $\left|\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt} \leqslant e^{-at}$ donne $g_1'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$ donc $g_1(x) = \ln(x)+C$ et $C=0$ car $g_1(1)=0$.

Exercice 60 *[sujet]* **1.** $D=\mathbb{R}$ car $g(x,t) \xrightarrow[t\to0]{} 1$ et $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ puis $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = |(e^{-2t}-e^{-t})\sin(xt)| \leqslant e^{-t}+e^{-2t}$

2. $f'(x) = \operatorname{Im}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t+ixt} - e^{-t+ixt}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{x}{4+x^2} - \frac{x}{1+x^2}$ donc $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4+x^2}{1+x^2}+C$.

Si $\varphi(t) = \dfrac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}$ alors φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ (car DSE par ex) puis, par IPP, $|f(x)| = \dfrac{1}{x}\left|\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi'(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty}|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$ (vérifier que φ' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$) donc $\displaystyle\lim_{+\infty} f = 0$ et $C=0$.

Exercice 61 *[sujet]* **1.** $f(x,t) = \dfrac{e^{-xt}\operatorname{sh} t}{t} \xrightarrow[t\to0]{} 1$ et $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-(x-1)t}}{2t}$ donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si $x-1>0$. Comme $f \geqslant 0$, on a $D_f =]1,+\infty[$

2. si $x \in [a,b] \subset]1,+\infty[$, on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt}\operatorname{sh}(t) \leqslant e^{-at}\operatorname{sh}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}e^{-(a-1)t}$ donne $g'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\operatorname{sh}(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

3. $|f(n,t)| \leqslant \dfrac{e^{-2t}\operatorname{sh}(t)}{t}$ si $n \geqslant 2$ et le TCD donne $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n) = 0$.

4. $g(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) + C$ et $C = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n) = 0$

Exercice 62 *[sujet]* **1.** $f(x,t) \xrightarrow[t\to 0]{} x$ et $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

2. $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-t}$

3. $\varphi'(x) = \operatorname{Re}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(1-ix)t}\,\mathrm{d}t\right) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $\varphi(0) = 0$ donc $\varphi(x) = \arctan(x)$

Exercice 63 *[sujet]* Si $f(x,t) = \dfrac{1-e^{-xt^2}}{t^2}$ alors $t \mapsto f(x,t)$ est prolongeable par continuité en 0 et $|f(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ si $x \geqslant 0$ donc F est définie sur $\mathbb{R}^+$ (et pas sur $\mathbb{R}^{-*}$ car $f(x,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$ si $x < 0$). La classe $\mathcal{C}^1$ de F sur $\mathbb{R}^{+*}$ provient de $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt^2} \leqslant e^{-at^2}$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$; on a $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ (en posant $u = t\sqrt{x}$). On en déduit $F(x) = \sqrt{\pi x} + C$, si $x > 0$, et on trouve $C = 0$ car $F(0) = 0$ et F est continue en 0 par $|f(x,t)| \leqslant f(b,t)$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^+$.

Exercice 64 *[sujet]* **1.** Si $f(x,t) = t^x\dfrac{t-1}{\ln t}$ alors $\lim\limits_{t\to 1} f(x,t) = 1$ et $f(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-1}{t^{-x}\ln(t)}$ (Bertrand) donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si $-x < 1$ (et $f \geqslant 0$)

2. Si $x \in [a,b] \subset]-1,+\infty[$ alors $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = t^x - t^{x+1} \leqslant t^a$. On a $g'(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+1}$ puis $g(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right) + C$ et $C = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$: $t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln(t)}$ est bornée sur $]0,1[$ (car prolongeable par continuité au segment $[0,1]$) donc $|g(x)[\leqslant M\displaystyle\int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x+1}$.

Exercice 65 *[sujet]* $\lim\limits_{t\to 0} g(x,t) = ix$ et $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-t}\right)$ donc T est définie sur $\mathbb{R}$.
$T'(x) = i\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(1-ix)t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{i}{1-ix}$ car $\left|e^{-(1-ix)t}\right| = e^{-t}$. Comme $T(0) = 0$, on trouve $T(x) = i\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

Exercice 66 *[sujet]* **1.** $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} 2e^{-t}$ donc $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ si $x > -1$

2. $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{\operatorname{ch} t}{(x+\operatorname{ch} t)^2} \leqslant \dfrac{\operatorname{ch} t}{(a+\operatorname{ch} t)^2}$ si $x \in [a,b] \subset]-1,+\infty[$ et $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} 2e^{-t}$

3. $\lim\limits_{x+\infty} f = 0$ car $|g(x,t)| \leqslant g(0,t)$ si $x \geqslant 0$

Exercice 67 *[sujet]* Si $f(x,t) = t^x\ln(1-t)$, $f(x,t) \underset{t\to 1}{\sim} \ln(1-t)$ et $f(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-1}{t^{-(x+1)}}$ donc φ est définie sur $]-2,+\infty[$.
φ est $\mathcal{C}^1$ sur ce domaine car $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = |\ln(t)f(x,t)| \leqslant t^a|\ln(t)\ln(1-t)| \underset{t\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{-a/2}}\right)$ si $[a,b] \subset]-2,+\infty[$ et $-a/2 < 1$.

Exercice 68 *[sujet]* **1.** f_n est définie sur $\mathbb{R}^*$ (et paire) car $t \mapsto \dfrac{1}{(x^2+t^2)^n}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ si $x \neq 0$ et $\underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$ (et $f_n(0)$ n'existe pas) ; $f_1(x) = \dfrac{\pi}{2|x|}$

2. $f_n'(x) = -2nxf_{n+1}(x)$ car si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\left|\dfrac{-2nx}{(x^2+t^2)^{n+1}}\right| \leqslant \dfrac{2nb}{(a^2+t^2)^{n+1}}$

3. On trouve (récurrence) $f_n(x) = \dfrac{(2n-2)!}{(2^{n-1}(n-1)!)^2} \times \dfrac{\pi}{2x^{2n-1}}$

Exercice 69 *[sujet]* **1.** $\underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

2. G est la primitive sur $\mathbb{R}$ nulle en 0 de $t \mapsto e^{-t^2}$ (continue sur $\mathbb{R}$). Pour F : si $f(x,t) = \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ alors $|f(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ donc F est continue sur $\mathbb{R}$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 1$ donne F $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = -2e^{-x^2}\displaystyle\int_0^1 e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ $(u = xt)$ pour $x > 0$. On en déduit $F + G^2 = C$.

3. $0 \leqslant F(x) \leqslant e^{-x^2}\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$, $C = I^2 = F(0) + G(0)^2 = \dfrac{\pi}{4}$ et comme $I \geqslant 0$, on a $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 70 *[sujet]* **1.** Si $h(x,t) = \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ alors $|h(,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ donne f continue sur $\mathbb{R}$ (et paire) et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2be^{-a^2(1+t^2)}$ si $[x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ donne f $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. $f'(x) = -2xe^{-x^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(xt)^2}\,\mathrm{d}t = -2Ie^{-x^2}$ si $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ ce qui donne $f(x) = -2Ig(x) + C$ pour $x > 0$ puis $x \geqslant 0$ par continuité en 0.

3. $|f(x)| \leqslant e^{-x^2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ donne $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc $C = 2I^2$ puis $f(0) = \dfrac{\pi}{2} = C$ donne $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 71 *[sujet]* **1.** $\lim\limits_{t\to0} f(x,t) = x$ et $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$; impaire facile

2. g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$

3. décomposition en éléments simples facile puis, si $x^2 \neq 1$, $g'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}\Big[\arctan(t) - x\arctan(xt)\Big]_{t=0}^{t=+\infty} \overset{x\geqslant0}{=} \dfrac{1}{1-x^2}\dfrac{\pi}{2}(1-x) = \dfrac{\pi}{2}(1+x)$ qui est aussi valable en $x=1$ par continuité de g'

4. facile avec $g(0) = 0$ pour la constante d'intégration

5. $I = 2g(1)$ par IPP

Exercice 72 *[sujet]* **1.** Si $g(x,t) = \dfrac{\arctan(x/t)}{1+t^2}$ alors $|g(x,t)| \leqslant \dfrac{\pi/2}{1+t^2}$ donne f continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t}{(1+t^2)(x^2+t^2)} \leqslant \dfrac{t}{(1+t^2)(a^2+t^2)}$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ donne g $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

2. Si $x \in]0,1[$, $g'(x) = \dfrac{1}{x^2-1}\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{x^2+t^2}\right)\mathrm{d}t = \dfrac{\ln x}{x^2-1}$ qui est prolongeable par continuité en 0 ; comme $f(0) = 0$, f est bien la primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$ qui s'annule en 0. Comme f est continue en 1, c'est $f(1) \overset{\text{IPP}}{=} \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 73 *[sujet]* **1.** $t \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ et positive (pour la DV), $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^x}$ donc $D =]1,+\infty[$

2. Avec $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leqslant 1 \\ f(a,t) & \text{si } t > 1 \end{cases}$ pour $x \in [a,b] \subset D$.

3. F est $\mathcal{C}^1$ sur D avec $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t^x|\ln(t)|}{(1+t^x)^2} \leqslant \dfrac{|\ln(t)|}{f}(x,t) \leqslant |\ln(t)|f(a,t) = \psi(t)$ qui reste intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $\phi(t) \underset{t\to0}{\sim} |\ln(t)|$ et $\psi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{1+a}{2}}}\right)$. Puis poser $u = \dfrac{1}{t}$ dans l'intégrale sur $]0,1]$. F est donc décroissante.

4. $\lim\limits_{+\infty} F = 0$ par TCD (et caract séq) avec la domination utilisée pour la continuité. Enfin, $\lim\limits_{1} F = +\infty$ car $F(x) \geqslant \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^x} \geqslant \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \frac{1}{2(x-1)}$

Exercice 74 *[sujet]* **1.** Si $f(x,t) = \dfrac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t}$ alors $\lim\limits_{t\to0} f(x,t) = y - x$ et $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt} \leqslant e^{-at}$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ donne $F'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{x}$.

2. $F(x) = -\ln(x) + C$ et $F(y) = 0$ donc $F(x) = \ln(y) - \ln(x)$.

Exercice 75 *[sujet]* **1.** Si $f(x,t) = \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\cos(xt)$ alors $\lim\limits_{t\to0} f(x,t) = b - a$ et $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ puis $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-at} + e^{-bt}$ donne F $\mathcal{C}^1$.

2. $F'(x) = \int_0^{+\infty} (e^{-bt} - e^{-at}) \sin(xt)\,\mathrm{d}t = \dfrac{x}{a^2+x^2} - \dfrac{x}{b^2+x^2}$ donc $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2+a^2}{x^2+b^2}\right) + C$

3. Par IPP (si $x > 0$) ; $h'(t) = \dfrac{be^{-bt} - ae^{-at}}{t} - \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t^2}$ donc $\lim\limits_{t\to 0} h'(t) = \dfrac{1}{2}(a^2 - b^2)$ et $h'(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc h' est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$; on en déduit $|F(x)| \leqslant \dfrac{1}{x}\int_0^{+\infty} |h'(t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $C = 0$.

Exercice 76 *[sujet]* **1.** Si $g(x,t) = \dfrac{e^{-\arctan(xt)}}{2+t^2}$ alors $|g(x,t)| \leqslant 1$ (ce qui donne en fait la continuité de f)

2. $0 \leqslant g(x,t) \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ donne $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}$ et $f(0) = \dfrac{1}{2}\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{1+(t/\sqrt{2})^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$

3. $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t}{1+(xt)^2} g(x,t) \leqslant t$ donne f et $\mathcal{C}^1$ et $f'(x) = -\int_0^1 \dfrac{t}{1+(xt)^2} g(x,t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$.

4. On applique le théorème de bijection à $h(x) = f(x) - x$: h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, $h(0) = f(0) > 0$ et $\lim\limits_{+\infty} h = -\infty$ (car f est majorée)

Exercice 77 *[sujet]* **1.** $|g(x,t)| \leqslant 1$ puis $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{\pi t}{(x+t)^2}\left|\sin\left(\dfrac{\pi t}{x+t}\right)\right| \leqslant \dfrac{\pi t}{(a+t)^2}$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$

2. $f(0) = -1$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 1$ pat TCDPC (même domination que pour $\mathcal{C}^0$)

3. Tous calculs faits, on trouve $f'(x) = \int_{\frac{x\pi}{x+1}}^{\pi} \dfrac{\pi - v}{v}\sin(v)\,\mathrm{d}v$ et $\dfrac{\pi - v}{v}\sin(v) \xrightarrow[v\to 0]{} \pi$ donc $v \mapsto \dfrac{\pi - v}{v}\sin(v)$ est intégrable sur $]0,\pi]$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \int_0^{\pi} \dfrac{\pi - v}{v}\sin(v)\,\mathrm{d}v$ donc (cons. du TAF), f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 78 *[sujet]* **1.** Si $g(x,t) = \dfrac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ alors $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} te^{-xt}$ donc ets intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $x > 0$ (et $g \geqslant 0$) ; f décroît car $x \mapsto g(x,t)$ décroît pour tout t.

2. $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = tg(x,t) \leqslant tg(a,t)$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ et $tg(a,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donne f $\mathcal{C}^1$; on pose $u = xt$: $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} \dfrac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{u^4+x^4}}\,\mathrm{d}u$ et $x \mapsto \int_0^{+\infty} \dfrac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{u^4+x^4}}\,\mathrm{d}u$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ par $\left|\dfrac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{u^4+x^4}}\right| \leqslant ue^{-u}$ ce qui donne $\lim\limits_{x\to+} x^2 f(x) = \int_0^{+\infty} ue^{-u}\,\mathrm{d}u = 1$ et $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

3. Par équivalent, f n'est pas intégrable sur $]0,1]$ mais l'est sur $[1,+\infty[$ car $|f(x)| = \dfrac{1}{x^4}\int_0^{+\infty} \dfrac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{1+(u/x)^4}}\,\mathrm{d}u \leqslant \dfrac{1}{x^4}\int_0^{+\infty} u^3 e^{-u}\,\mathrm{d}u = O\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$.

Exercice 79 *[sujet]* **1.** Si $f(x,t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ alors $\lim\limits_{t\to 0} f(x,t) = \dfrac{1}{2}$ et $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $x \geqslant 0$.

2. On vérifie $0 \leqslant \dfrac{1-\cos t}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2x}$ si $x > 0$.

3. $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{1-\cos(t)}{t} e^{-xt}$ donc $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si $x > 0$ (mêmes justifications) ; puis $\left|\dfrac{partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| = |1-\cos(t)|z^{-xt} \leqslant 2e^{-at}$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$. On en déduit $F''(x) = \int_0^{+\infty} (1-\cos(t))e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}$ donc $F'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$ et $F(x) = x\ln(x) - \dfrac{x}{2}\ln(1+x^2) - \arctan(x) + Cx + D = -\dfrac{x}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) - \arctan(x) + Cx + D$; comme $\lim\limits_{+\infty} F = 0$, on trouve $C = 0$ et $D = \dfrac{\pi}{2}$. Par continuité de F en 0, on trouve $F(0) = D = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 80 *[sujet]* **1.** Si $g(x,t) = \dfrac{e^{-tx^2}}{\sqrt{t+t^3}}$ alors $g(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $x > 0$; puis $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{2x\sqrt{t}e^{-tx^2}}{\sqrt{1+t^2}} \leqslant \dfrac{2b\sqrt{t}e^{-ta^2}}{\sqrt{1+t^2}}$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$.

2. On pose $u = tx^2$: $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u + u^3/x^4}}\,du$ puis, si (x_n) tend vers $+\infty$, $x_n f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du = C > 0$ par TCD avec $\left|\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u + u^3/(x_n)^4}}\right| \leqslant \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$. On en déduit $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{x}$.

Exercice 81 *[sujet]* **1.** On pose $h(x,t) = \dfrac{e^{itx}}{(1+t^2)^2}$ et on a $|h(x,t)| = \dfrac{1}{(1+t^2)^2}$ et $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$ puis $\left|\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| = \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2}$ qui sont toutes intégrables donc f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

2. Par IPP $f'(x) = i\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{t}{(1+t^2)^2} \times e^{ixt}\,dt = -\dfrac{ix}{2}g(x)$

Exercice 82 *[sujet]* Si $g(x,t) = \dfrac{1-\cos(xt)}{t^2}e^{-t}$ alors $\lim\limits_{t\to0} g(x,t) = \dfrac{x^2}{2}$ et $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} O(\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$; puis $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{|\sin(xt)|}{t}e^{-t} \leqslant e^{-t}$ et enfin $\left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant e^{-t}$ donc $f''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}\,dt = \dfrac{1}{1+x^2}$. On remonte : $f'(x) = \arctan(x) + C$, avec $C = 0$ car $f'(0) = 0$, puis $f(x) = x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + D$ avec $D = 0$ car $f(0) = 0$

Exercice 83 *[sujet]* **1.** Si $g(x,t) = \dfrac{1-e^{-xt}}{1+t^2}$ alors $|g(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ (donc g est continue sur $\mathbb{R}^+$), puis $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t}{1+t^2}e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $x > 0$ et $\left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{t^2}{1+t^2}e^{-at} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$.

2. Soit (x_n) tendant vers $+\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n f(x_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{1+t^2} = \dfrac{\pi}{2}$ par TCD avec $|g(x_n,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2x}$.

$g''(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{t^2}{1+t^2}e^{-xt}\,dt = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt - g(x) + \int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{1+t^2}$ donc $g''(x) + \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} - g(x) \xrightarrow[x\to0]{} \dfrac{\pi}{2}$ par continuité de g en 0. Ensuite $g'(x) = g'(1) + \displaystyle\int_1^x \left(g''(t) + \dfrac{1}{t}\right)dt - \ln(x)$ donc $g'(x) + \ln(x) \xrightarrow[x\to0]{} g'(1) - \displaystyle\int_0^1 \left(g''(t) + \dfrac{1}{t}\right)dt$ (finie), $g'(x) \underset{x\to0}{\sim} -\ln(x)$ est donc intégrable sur $]0,1]$ et enfin $g(x) = g(0) + \displaystyle\int_0^x g'(t)\,dt = \int_0^x (g'(t) + \ln(t))\,dt - \int_0^x \ln(t)\,dt$; $t \mapsto g'(t) + \ln(t)$ converge en 0 donc est bornée au voisinage de 0, ce qui donne $\displaystyle\int_0^x (g'(t) + \ln(t))\,dt \underset{x\to0}{=} O(x)$ alors que $\displaystyle\int_0^x \ln(t)\,dt = x\ln(x) - x \underset{x\to0}{\sim} x\ln(x)$. On a donc $g(x) \underset{x\to0}{\sim} x\ln(x)$ et $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \ln(x)$.

Exercice 84 *[sujet]* Si $g(x,t) = \dfrac{\arctan(tx)}{1+t^2}$, $|g(x,t)| \leqslant \dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$ donne la continuité sur $\mathbb{R}$ et $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} \leqslant \dfrac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ la classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Puis, pour $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\dfrac{t}{1+t^2} - \dfrac{x^2 t}{1+t^2x^2}\right)dt = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$ (qui se prolonge par continuité en 1 pour donne $f'(1) = \dfrac{1}{2}$). $f(0) = 0$ donc f' étant intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a $f(x) = \displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$ (limite finie).

Exercice 85 *[sujet]* **1.** $g(x,t) \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{-\ln(t)}{t^{-x}} = o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{1-x}{2}}}\right)$ et $\lim\limits_{t\to1} g(x,t) = 1$

2. Si $x \in [a,b] \subset D$, $\left|\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{|\ln(t)|^{k+1}t^a}{1-t} = \varphi(t)$; $\varphi(t) \underset{t\to0}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{1-a}{2}}}\right)$ et $\lim\limits_{t\to0}\varphi(t) = 0$ si $k \geqslant 1$.

3. $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(x+k+1)^2}$ par TITT avec $\dfrac{t^x\ln(t)}{t-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} -\ln(t)t^{x+k}$ pour $t \in]0,1[$ et $\displaystyle\int_0^1 |\ln(t)|t^{x+k}\,dt \overset{\text{IPP}}{=} \dfrac{1}{(x+k+1)^2}$.

Exercice 86 *[sujet]* $I(x) = \displaystyle\int_0^{+infty} \dfrac{du}{1+xu^2} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{x}}$ puis $I'(x) = -J(x)$ car $\left|\dfrac{\sin^2 t}{(\cos^2 t + x\sin^2 t)^2}\right| \leqslant \dfrac{\sin^2 t}{(\cos^2 t + a\sin^2 t)^2}$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ donc $J(x) = \dfrac{\pi}{4x\sqrt{x}}$

Exercice 87 *[sujet]*

$|g(x,t)| \leqslant e^{-t}$

Avec $\left|\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| = t^{2k}\left|\cos\left(xt^2 + k\dfrac{\pi}{2}\right)\right| e^{-t} \leqslant t^{2k}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

On a $F^{(2k+1)}(0) = 0$ et $F^{(2k)}(0) = (-1)^k \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{4k}e^{-t}\,\mathrm{d}t = (-1)^k(4k)!$. La série de Taylor de F est donc $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\frac{(4k)!}{(2k)!}x^{2k}$ dont le RCV est nul donc F n'est pas DSE.

Exercice 88 *[sujet]* On montre que G est dérivable en 0 : si $g(x,t) = \exp[x\ln(f(t))]$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $[0,1]$ et $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \ln(f(t))g(x,t) \leqslant C$ si $x \in [-a,a] \subset \mathbb{R}$ car $(x,t) \mapsto \ln(f(t))g(x,t)$ est continue sur $[-a,a]\times[0,1]$ qui est fermé borné (et non vide) ; G est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{1}{x}\left(\ln(G(x)) - \ln(G(0))\right) \xrightarrow[x\to 0]{} (\ln\circ G)'(0) = \dfrac{G'(0)}{G(0)} = \displaystyle\int_0^1 \ln(f(t))\,\mathrm{d}t$.

Comme $G(0) = 1$, on a $F(x) = \exp\left[\dfrac{1}{x}\ln(G(x))\right] \xrightarrow[x\to 0]{} \exp\displaystyle\int_0^1 \ln(f(t))\,\mathrm{d}t$.

Exercice 89 *[sujet]* **1.** Cours

2. On a $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t\,\mathrm{sh}(at)e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $x \in [-a,a]$

3. Par IPP, on trouve $f'(x) = \dfrac{x}{2}f(x)$ donc $f(x) = f(0)e^{\frac{x^2}{4}}$

Exercice 90 *[sujet]* **1.** $|g(x,t)| \leqslant e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

2. $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant te^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $f'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(xt)\times te^{-t^2}\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} -\frac{x}{2}f(x)$

3. $f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-x^2/4}$

Exercice 91 *[sujet]* **1.** $|\cos(2xt)e^{-x^2}| \leqslant e^{-x^2}$ (intégrable sur $\mathbb{R}^+$)

2. Si $t \in [-a,a] \subset \mathbb{R}$, $|-2x\sin(2xt)e^{-x^2}| \leqslant 2ae^{-x^2}$ donc $f'(t) = -2\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(2xt)\times xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x \overset{\text{IPP}}{=} -2tf(t)$

3. $f(t) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-t^2}$

4. $f^{(n)}(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 2^n t^n\cos\left(2xt + n\frac{\pi}{2}\right)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ car $\left|2^n t^n\cos\left(2xt + n\dfrac{\pi}{2}\right)e^{-x^2}\right| \leqslant 2^n a^n e^{-x^2}$ si $t \in [-a,a]$

Exercice 92 *[sujet]* **1.** Si $g(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{1+t}$ alors, pour $x > 0$ $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t}{1+t^2}e^{-xt} \leqslant \dfrac{t}{1+t^2}e^{-at} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$. On vérifie ensuite $f(x) - f'(x) = \dfrac{1}{x}$

2. On pose $u = xt$ et on a $xf(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{1+u/x}\,\mathrm{d}u$ qui tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u = 1$ par TCD : si (x_n) tend vers $+\infty$, $\left|\dfrac{e^{-u}}{1+u/x_n}\right| \leqslant e^{-u}$.

Exercice 93 *[sujet]* **1.** Si $g(x,t) = \exp\left(-t^2 - \dfrac{x^2}{t^2}\right)$ alors $|g(x,t)| \leqslant e^{-t^2}$ donne la continuité

2. f est paire donc si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, on a $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{2b}{t^2}\exp\left(-t^2 - \dfrac{a^2}{t^2}\right) = \varphi(t)$, $\lim\limits_0 \varphi = 0$ et $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

3. si $x > 0$, $f'(x) = -2x\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2}\exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right)\mathrm{d}t \overset{t=\frac{x}{u}}{=} -2f(x)$ donc $f(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-|x|}$ par parité.

Exercice 94 *[sujet]* **1.** Si $g(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{x+t}$ alors $t \mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ pour $x > 0$ et $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$; si (x_n) tend vers $+\infty$, $|g(x_n,t)| \leqslant e^{-t}$ dès que $x_n \geqslant 1$ donc par TCD, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

2. $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t}{t+x}e^{-xt} + \dfrac{e^{-xt}}{(x+t)^2} \leqslant \dfrac{t}{a+t}e^{-at} + \dfrac{e^{-at}}{(a+t)^2}$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$; l'équation différentielle s'obtient en effectuant une IPP sur le terme $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$ de $F'(x)$.

Comme $F'(x) = 2xF(x) - \dfrac{2}{x}$, F est $\mathcal{C}^n$ pour tout n par récurrence.

3. Les solutions de cette équation sont $y(x)=\alpha e^{x^2}+2e^{x^2}\displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$ (variation de la constante) ; la seule solution de cette forme tendant vers 0 est obtenue pour $\alpha=-2\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$ (toutes les autres DV en $+\infty$ et on sait déjà que cette équation admet au moins une solution qui tend vers 0 en $+\infty$ puisque F est une telle solution).
$F(x)\underset{x\to 0}{\sim}2\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to 0\to +]{}\infty$ (intégrale DV d'une fonction positive) donc $F(x)\underset{x\to 0}{\sim}2\displaystyle\int_x^{1}\frac{e^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$ (l'autre partie est une constante donc négligeable devant ce terme qui tend vers $+\infty$). Enfin, $\displaystyle\int_0^x\frac{e^{-t^2}-1}{t}\,\mathrm{d}t$ est CV donc $F(x)\underset{x\to 0}{\sim}2\displaystyle\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{t}=-2\ln(x)$.

Exercice 95 *[sujet]* **1.** Si $f(x,t)=\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ alors $|g(x,t)|\leqslant\dfrac{1}{1+t^2}$, puis $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $x>0$ et $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right|=\dfrac{t^2}{1+t^2}e^{-xt}\leqslant e^{-at}$ si $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*}$.

2. On vérifie $g(x)+g''(x)=\dfrac{1}{x}$. On pose $h(x)=\cos(x)\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t-\sin(x)\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ (les deux intégrales CV si $x>0$ par IPP) et on vérifie que h est aussi solution de cette équation car $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t-\int_1^x\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ de dérivée $-\dfrac{\sin(x)}{x}$.
$f-h$ est donc solution de l'équation homogène $y''+y=0$ dont les solutions $\alpha\cos+\beta\sin$ sont 2π-périodiques. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t=0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$; puis $0\leqslant g(x)\leqslant\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}$ donc $g-h$ tend vers 0 en $+\infty$ et est 2π-périodique, donc est nulle.

Exercice 96 *[sujet]* **1.** $|g(x,t)|\leqslant\dfrac{1}{1+t^2}$, puis $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $x>0$ et $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right|=\dfrac{t^2}{1+t^2}e^{-xt}\leqslant e^{-at}$ si $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*}$.

2. facile avec f''

3. Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont $y(x)=\alpha\cos(x)+\beta\sin(x)+f(x)$. On vérifie que $\displaystyle\lim_{+\infty}f=0$ car $0\leqslant f(x)\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}$ (ou TCDPC) donc si y tend vers 0 alors $y(x)-f(x)$ aussi mais $y-f$ est périodique donc si elle tend vers 0, on a $(y-f)(x)=(y-f)(x+2n\pi)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc $y=f$.

Exercice 97 *[sujet]* On pose $g(x,t)=\cos(x\cos t)$; $t\mapsto g(x,t)$ et $t\mapsto\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ sont continues sur $[0,\pi]$ et $\left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right|\leqslant 1$ donne f $\mathcal{C}^2$; on trouve $xf''(x)+f'(x)+xf(x)=0$ par IPP sur $f'(x)=-\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(t)\sin(x\cos(t))\,\mathrm{d}t$

Exercice 98 *[sujet]* **1.** On pose $g(x,t)=\ln(t)e^{-xt}$ et on a $g(x,t)\underset{t\to 0}{\sim}\ln(t)$ et $g(x,t)\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $x>0$; puis $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant|t\ln(t)|e^{-at}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*}$

2. Par IPP sur $f'(x)$, on trouve $f(x)+xf'(x)=-\dfrac{1}{x}$; il suffit ensuite de vérifier que $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est solution de l'équation homogène et $x\mapsto\dfrac{-\ln(x)}{x}$ est une solution de l'équation complète.

Exercice 99 *[sujet]* **1.** Si $g(x,t)=\dfrac{1-\cos(xt)}{t^2\,(1+t^2)}$ alors $\displaystyle\lim_{t\to 0}g(x,t)=\frac{x^2}{2}$ et $g(x,t)\underset{t\to+\infty}{=}O\left(\dfrac{1}{t^4}\right)$ donc $D=\mathbb{R}$

2. On prouve directement $\mathcal{C}^2$: $t\mapsto\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)=\dfrac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (prolongeable en 0 et $O\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$ quand t tend vers $+\infty$) puis $\left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right|=\dfrac{|\cos(xt)|}{1+t^2}\leqslant\dfrac{1}{1+t^2}$

3. $f(x)-f''(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\left[(1-\cos(xt))\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)-\frac{\cos(xt)}{1+t^2}\right]\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1-\cos(x,t)}{t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}$ et, en posant $u=xt$ $(x>0)$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(xt)}{t^2}\,\mathrm{d}t=x\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$.

On a $f''(x)=\alpha e^{x}+\beta e^{-x}$ et $|f''(x)|\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}$ (borné sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $\alpha=0$; $f'(0)=0$ donne (par continuité de f' en 0) $\beta=-a$ et $f(0)=0$ (par continuité de f en 0 cette fois), $\beta=-b=\frac{\pi}{2}$. On en déduit $f(x)=\frac{\pi}{2}(x+e^{-x}-1)$ pour $x>0$ (et f est paire)

On peut aussi en déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}\overset{\text{IPP}}{=}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$.

Exercice 100 *[sujet]* **1.** Si $f(t,x)=\dfrac{e^{-tx^2}}{1+x^2}$ alors $|f(t,x)|\leqslant\dfrac{1}{1+x^2}$ donne F continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right|\leqslant e^{-ax^2}$ si $t\in[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*}$, la classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

2. $F'(t)=-\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}e^{-tx^2}\,\mathrm{d}x=F(t)-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}$ (en posant $u=x\sqrt{t}$). Les solutions de cette équation sont $y(t)=\alpha e^t-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^t\displaystyle\int_0^t\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ (l'intégrale CV car $\underset{u\to0}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{u}}$) ; $f(0)=\pi2$ donc $F(t)=\dfrac{\pi}{2}e^t-\sqrt{\pi}e^t\theta(t)$ (en posant $u=v^2$)

Exercice 101 *[sujet]* **1.** $g(x,t)=\dfrac{e^{-t}e^{itx}}{\sqrt{t}}$ puis $|g(x,t)|=\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\underset{t\to0}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $|g(x,t)|\underset{t\to+\infty}{=}o(e^{-t})$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$. $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|=\sqrt{t}e^{-t}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donne la classe $\mathcal{C}^1$.

2. $f(x)=\displaystyle\int_0^{\varepsilon}g(x,t)\,\mathrm{d}t+\int_{\varepsilon}^{+\infty}g(x,t)\,\mathrm{d}t$; $\left|\displaystyle\int_0^{\varepsilon}g(x,t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}=2\sqrt{\varepsilon}$ et $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty}g(x,t)\,\mathrm{d}t\overset{\text{IPP}}{=}\frac{e^{-\varepsilon+ix\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}(-1+ix)}+\frac{1}{2(-1+ix)}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{e^{-t}e^{ixt}}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ donc $\left|\displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty}g(x,t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\varepsilon(1+x^2)}}+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Pour $\varepsilon>0$ fixé, il existe x_0 tel que pour $x\geqslant x_0$ on ait $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon(1+x^2)}}\leqslant\varepsilon$ et $\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon$. On a donc pour $\varepsilon>0$ et $x\geqslant x_0$, $|f(x)|\leqslant2\sqrt{\varepsilon}+2\varepsilon$.

3. $f'(x)\overset{\text{IPP}}{=}\dfrac{-i}{2(-1+ix)}f(x)$ donc $f(x)=f(0)(1+x^2)^{-1/4}e^{\frac{i}{2}\arctan x}$ (ce qui redonne bien plus facilement la limite nulle en $+\infty$!)

Exercice 102 *[sujet]* **1.** $|g(x,t)|\leqslant e^{-kt}$ et $k>0$

2. $F_k'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-(k-1)t}\cos\left(xe^t\right)\,\mathrm{d}t$ car $\left|e^{-(k-1)t}\cos\left(xe^t\right)\right|\leqslant e^{-(k-1)t}$ et $k-1>0$. Par IPP, $xF_k'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-kt}\times xe^t\cos\left(xe^t\right)\,\mathrm{d}t=\left[e^{-kt}\sin\left(xe^t\right)\right]_{t=0}^{t=+\infty}+\int_0^{+\infty}ke^{-kt}\sin\left(xe^t\right)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 103 *[sujet]* **1.** f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car, si $[-a,a]\subset\mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant e^a$; $f'(x)=-\displaystyle\int_0^{\pi/4}\tan(t)e^{-x\tan(t)}\,\mathrm{d}t\leqslant0$. $e^u\geqslant1+u$ donc $f(x)\geqslant\dfrac{\pi}{4}-x\displaystyle\int_0^{\pi/4}\tan(t)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to-\infty]{}+\infty$ et $\displaystyle\lim_{+\infty}f(x)=0$ par TCD car $\left|e^{-x_n\tan(t)}\right|\leqslant1$

2. On a $u_1=f(u_0)\in\mathbb{R}^+$ et comme sur $\mathbb{R}^+$, on a $|f'(x)|\leqslant\displaystyle\int_0^{\pi/4}\tan(t)\,\mathrm{d}t=k<1$, f est k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$ donc $|u_{n+1}-u_n|\leqslant k|u_n-u_{n-1}|\leqslant k^{n-1}|u_2-u_1|$; comme $k\in[0,1[$, $\sum k^n$ CV donc $\sum(u_{n+1}-u_n)$ est ACV et (u_n) CV.

3. $\displaystyle\lim_{-\infty}f=+\infty$ donc f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^-$.

En posant $u=x\tan(t)$, on trouve $f(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\frac{e^{-u}}{1+(u/x)^2}\,\mathrm{d}u$ puis $0\leqslant\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{1+(u/x)^2}\,\mathrm{d}u\leqslant\int_x^{+\infty}e^{-u}\,\mathrm{d}u=e^{-x}$ donc $xf(x)\underset{+\infty}{=}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{1+(u/x)^2}\,\mathrm{d}u+o(1)$ et, par TCD, $\displaystyle\lim_{+\infty}xf(x)=\int_0^{+\infty}e^{-u}\,\mathrm{d}u=1$ car $\left|\dfrac{e^{-u}}{1+(u/x_n)^2}\right|\leqslant e^{-u}$.

On a donc $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x}$ donc f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.