TD15 : Intégrales à paramètres et rayon de convergence

Exercice 1 **(CCINP PSI 2022)**
Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\,\text{sh}\, t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $g'(x)$.
3. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
4. En déduire la valeur de $g(x)$

Exercice 2 **(CCINP PSI 2021)**
Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$

1. Trouver le domaine de définition D de F.
2. Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur D et, à l'aide d'un changement de variable, justifier que $F'(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)t^x}{(1+t^x)^2}\left(\frac{1}{t^2}-1\right)\mathrm{d}t$.
   En déduire les variations de F.
3. Déterminer les limites de F en $+\infty$ et en 1.
   indiction : la limite de F en 1 est $+\infty$; commencer par minorer F par l'intégrale sur $[1,+\infty[$

Exercice 3 **(AADN PSI 2009)**
Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Calculer f'' puis f.

Exercice 4 **(CCP PSI 2013)**

1. Justifier la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
2. Soient $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $F+G^2$ est constante.
   indication : montrer que F et G sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; ce n'est pas le même théorème qu'il faut utiliser pour F et G.
3. Déterminer la limite de F en $+\infty$ et en déduire la valeur de I.

Exercice 5 **(Centrale PSI 2019)**

1. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
3. En déduire la valeur de f ; on donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   indication : trouver une équation différentielle vérifiée par f.

Exercice 6 **(Mines-Ponts PSI 2017)**
Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}x^{2n}$.

Exercice 7 **(CCP PSI 2022)**
On note $a_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2}$.

1. Prouver l'existence de a_n.
2. Montrer que $a_n \sim \dfrac{1}{n}$.
   indication : comparaison série/intégrale
3. Déterminer le domaine de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

Exercice 8 **(CCP PSI 2016)**

1. Soit $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   indication : vérifier que $1+t^2 \geqslant 2t$.
2. Rayon de convergence et domaine de définition de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$?