

TD16 : Séries entières

Exercice 1 (CCINP PSI 2021)

1. Définir le rayon de convergence d'une série entière puis déterminer celui de $S(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$ avec $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.
indication : encadrer u_n par exemple.
2. Trouver a, b, c tels que $\frac{1}{(1+t^2)(1-tx)} = \frac{at+b}{1+t^2} + \frac{c}{1-tx}$.
3. Déterminer $S(x)$ pour $x \in]-R, R[$ puis la valeur de $S(-1)$.

Exercice 2 (CCP PSI 2018)

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n \geq 0} n(-1)^n x^n$.

indication : séparer les termes pairs et impairs.

Exercice 3 (Mines-Ponts PSI 2017)

Domaine de définition et somme de $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)(2n+1)}$. Calculer $f(1)$.

indication : décomposer $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ en éléments simples ; pour $g(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{2n+1}$ distinguer $x > 0$ et $x < 0$.

Exercice 4 (CCP PSI 2016)

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{2^{n+1}}$.

Exercice 5 (CCP MP 2015)

DSE de $f(x) = \ln(1-x-2x^2)$.

indication : $f(x)$ se scinde en deux.

Exercice 6 (Centrale PC 2011)

Donner le DSE de $f(x) = \ln(1+x+x^2)$.

indication : cette fois, on ne peut pas scinder $f(x)$ mais on peut le faire pour $f'(x)$.

Exercice 7 (ENSAM PSI 2015)

1. Déterminer le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n! x^{2n+1}}{1.3.5 \dots (2n+1)}$.
2. Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f et en déduire f .

Exercice 8 (CCINP PSI 2021)

Soit $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

1. Calculer $f'(x)$ et trouver a, b et c polynômiales telles que $a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x)$.
2. f est-elle DSE ?
3. Déterminer les coefficients du DSE de f .
indication : on peut remarquer que f est impaire (pour simplifier les calculs)

Exercice 9 (CCINP PSI 2022)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 3$ et $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$ pour $n \geq 0$.

1. Montrer que $0 \leq \frac{a_n}{n!} \leq 4^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$?
3. Montrer que la somme f de la série entière précédente vérifie $f'(x) = f(x)^2$.
4. En déduire la valeur de a_n .
indication : déterminer f en se plaçant sur un intervalle $] -h, h[$ où f ne s'annule pas.

Exercice 10 (Mines-Télécom PSI 2022)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes et R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

1. Rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} a_n (\ln n) z^n$ et $\sum_{n \geq 1} a_n \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) z^n$?
2. On pose $\gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$. Montrer que la suite (γ_n) converge.
3. Montrer que : $\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n \sim -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$ quand $x \rightarrow 1^-$. On pensera à un produit de Cauchy de séries entières.