I Groupe orthogonal en dimension 3

Exercice 1 *[Solution]*
Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation autour de $u = (1, 2, 2)$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice 2 (ENSAM PSI 2010) *[Solution]*
Matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{5}$ autour de $(1, -1, 1)$?

Exercice 3 (Mines-Ponts PC 2013) *[Solution]*
Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice 4 (ENSAM PSI 2011) *[Solution]*
Etudier f canoniquement associé à $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 (CCP PSI 2016) *[Solution]*
Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 6 (ENSAM PSI 2014) *[Solution]*
Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 7 (ENTPE-EIVP PC 2010) *[Solution]*
Montrer que $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^4$. Donner une base orthonormale de son noyau et de son image.

Exercice 8 (ENTPE-EIVP PSI 2013) *[Solution]*
Trouver a, b, c, d tels que $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & a \\ -2 & 6 & b \\ 3 & c & d \end{pmatrix}$ soit une matrice de rotation ; la caractériser dans ce cas.

Exercice 9 (Mines-Ponts MP 2007 et autres) *[Solution]*
Montrer que $A = \begin{pmatrix} p & r & q \\ q & p & r \\ r & q & p \end{pmatrix}$ est une matrice de rotation si et seulement si p, q et r sont les racines d'un polynôme de la forme $X^3 - X^2 + \lambda$.

Exercice 10 (Centrale PSI 2013) *[Solution]*

1. Montrer que si r est une rotation d'angle θ et $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $P(1) = |P(e^{i\theta})| = 1$ alors $P(r)$ est une rotation.
2. Vérifier que $R_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une rotation r_0. Montrer que $\dfrac{1}{3}\left(2r_0^2 - r_0 + 2id\right)$ est une rotation et en déterminer l'angle.

Exercice 11 (Mines-Ponts PSI 2012) *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = {}^tA$. Montrer que $A = 0$, ou $A = I_2$ ou A est orthogonalement semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ou $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 12 (Centrale PSI 2013) *[Solution]*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, telle que $M^2 = {}^tM$

1. Montrer que M est orthogonale et que $\ker(M - I_n)^\perp$ est stable par M.

2. Déterminer les matrices M pour $n = 2$ et $n = 3$.

Exercice 13 **(Centrale PSI 2013)** *[Solution]*
Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $s \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ euclidien canoniquement associé à A.

1. Donner les éléments géométriques de s.

2. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Déterminer les rotations r de $\mathbb{R}^3$ telles que $s \circ r = r \circ s$.

3. Même question en rajoutant $\mathrm{Tr}(r) = 0$.

Exercice 14 **(Mines-Ponts PSI 2021)** *[Solution]*
Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $r \neq id$ une rotation au tour de D et s une symétrie orthogonale par rapport à un plan P.

1. On suppose $D \perp P$, montrer que $r \circ s = s \circ r$
indication : écrire les matrices dans une bon bien choisie

2. On suppose $r \circ s = s \circ r$; que peut-on dire ?
indication : D est un espace propre de r qui est donc stable par s

Exercice 15 **(ENSAM PSI 2015)** *[Solution]*
Soit $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ non nul et $f : x \mapsto u \wedge x$.

1. Déterminer le noyau de f et calculer $f \circ f$ (on rappelle $u \wedge (v \wedge w) = (u|w)v - (u|v)w$)

2. Donner la matrice de f dans la base canonique et calculer A^2.

3. Calculer f^n en fonction de f, f^2 et $\alpha = \|u\|$. Calculer et étudier $\exp(f) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} f^n$.

II Groupe orthogonal et base orthonormale

Exercice 16 **(ENSAM PSI 2015)** *[Solution]*
Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{i,j} m_{i,j}\right| \leqslant n \leqslant \displaystyle\sum_{i,j} |m_{i,j}| \leqslant n^{3/2}$.
indication : calculer $(f(e_i)|e_j)$ pour f canoniquement associé à M et (e_i) la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 17 **(CCP PSI 2016)** *[Solution]*
Soit $a \in E$ non nul, E espace euclidien. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquels $u : x \mapsto \alpha < x|a > a - x$ est une isométrie. Reconnaître u pour ces valeurs.

Exercice 18 **(CCINP PSI 2018)** *[Solution]*
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E espace euclidien, tel que $\forall (x, y) \in E^2, (x|y) = 0 \Rightarrow (u(x)|u(y)) = 0$.

1. Montrer que les images des vecteurs d'une base orthonormée sont toutes de même norme (on la note μ).

2. Montrer que $\forall x \in E, \|u(x)\| = \mu\|x\|$ et en déduire qu'il existe $g \in \mathcal{O}(E)$ tel que $u = \mu g$.

Exercice 19 **(ENTPE-EIVP PSI 2012)** *[Solution]*
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux base orthonormées de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (u(e_i)|e'_j)^2$ ne dépend ni de $\mathcal{B}$, ni de $\mathcal{B}'$.
indication : commencer par identifier la somme sur j.

Exercice 20 **(ENSAM PSI 2018)** *[Solution]*

1. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, E espace euclidien, vérifiant $\forall x \in E, (f(x)|x) = 0$, montrer que $f - id$ et $f + id$ sont bijectifs.

2. Montrer que $g = (id + f) \circ (id - f)^{-1}$ est un automorphisme orthogonal qui n'admet pas -1 pour valeur propre.

3. Étudier la réciproque : si g est un automorphisme orthogonal qui n'admet pas -1 pour valeur propre, existe-t-il f tel que $\forall x \in E, (f(x)|x) = 0$ et $g = (id + f) \circ (id - f)^{-1}$?
indication : on peut calculer g en fonction de f.

Exercice 21 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soient $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -{}^tC \\ C & I_n \end{pmatrix}$

1. Calculer $M\,{}^tM$ et en déduire $M \in \mathcal{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$
2. Soit $N = M^{-1}\,{}^tM$. Montrer que $N \in \mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Exercice 22 **(ENSAM PSI 2018)** *[Solution]*
Soit E un espace euclidien.

1. Soit f une isométrie de E telle que $f \circ f = -id$. Montrer que pour tout $u \in E$, u et $f(u)$ sont orthogonaux.
2. Déterminer les isométries de $\mathbb{R}^2$ telles que $f \circ f = -id$.
3. Montrer qu'il n'existe pas d'isométrie de $\mathbb{R}^3$ telle que $f \circ f = -id$.
   indication : utiliser le déterminant
4. Soit f une isométrie telle que $\forall u \in E, (f(u)|u) = 0$. Montrer que $f \circ f = -id$.
   indication : vérifier que si $\forall u \in E, (f(u)|u) = 0$ *alors* $\forall (x, y) \in E^2, (f(x)|y) = -(x|f(y))$

Exercice 23 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*
Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\dfrac{1}{3}(2M + I_n) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $(Mx|x) = \|x\|^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Que peut-on en déduire pour M ?
   indication : montrer que $M + {}^tM = 2I_n$ *puis qu'il existe* A *antisymétrique telle que* $M = I_n + A$*, puis* $A^2 = 0$ *et enfin* $A = 0$*.*

Exercice 24 **(Mines-Ponts PC 2011)** *[Solution]*

1. Montrer que toute matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $P = \Omega T$, où Ω est réelle orthogonale et T triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs (on pourra s'inspirer du procédé d'orthonormalisation de Schmidt). Montrer que cette décomposition est unique.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $(\det A)^2 \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j})^2\right)$.

Exercice 25 **(CCP PSI 2017)** *[Solution]*

1. Pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, calculer $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta)$ et $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta)$ et déterminer leurs limites.
2. Soit r une rotation d'angle θ de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$; déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r^k$.
3. Montrer que si $u \in \mathcal{O}(E)$ alors $E = \ker(u - id) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(u - id)$ et calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u^k$.

Exercice 26 **(CCP PSI 2021)** *[Solution]*
Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{O}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(v)^\perp = \ker(v)$ où $v = u - id$.
2. Soit $a \in E$ et $x_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^k(a)$; montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Exercice 27 **(Mines-Ponts PSI 2017)** *[Solution]*
Pour $f \in \mathcal{O}(E)$, on note $K(f) = \ker(f - id)$ et $I(f) = \mathrm{Im}(f - id)$. Si $u \in E$, $u \neq 0$, on note s_u la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}\{u\}^\perp$.

1. Montrer que F est stable par $f \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si $F^\perp$ est stable par f.
2. Pour $f \in \mathcal{O}(E)$, montrer que $E = K(F) \overset{\perp}{\oplus} I(f)$
3. Soient $(u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de E et $f = s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_p}$; montrer que $I(f) = \mathrm{Vect}\{u_1, \dots, u_p\}$.

Exercice 28 *[Solution]*
Soit f un endomorphisme orthogonal de E euclidien.

1. Montrer que $u = f + f^{-1}$ est symétrique et en déduire qu'il existe $x \neq 0$ tel que $\mathrm{Vect}\{x, f(x)\}$ est stable par f.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs avec des blocs de taille 1 ou 2 de la forme $D_1 = (1)$, $D_1' = (-1)$ et $D_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Exercice 29 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*
Pour $Z = (z_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on pose $\overline{Z} = (\overline{z_i}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit λ une valeur propre complexe de A ; montrer que $|\lambda| = 1$.
indication : calculer ${}^t\overline{Z}AZ$ *et vérifier que c'est en fait un réel.*
2. On suppose que A admet une valeur propre complexe non réelle. Montrer qu'il existe une famille libre $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ telle que $(AX, AY) \in F^2$ où $F = \mathrm{Vect}\{X, Y\}$.
3. Écrire la matrice de u_F, endomorphisme induit par A sur F, dans une base orthonormale de F.
4. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}$ où $D = \mathrm{diag}(R(\theta_1), \ldots, R(\theta_k))$ est diagonale par blocs, avec $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

III Espaces stables

Exercice 30 **(ENSIIE-ENSEA PC 2010)** *[Solution]*
Déterminer les droites stables par $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1/3 & 0 & -1/2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que si P est stable par A alors $P^\perp$ est stable par ${}^tA$ et déterminer l'unique plan stable par A.

Exercice 31 **(Centrale PC 2012)** *[Solution]*
Soit E espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si u laisse stable toutes les droites alors u est une homothétie.
2. Montrer que si u laisse stable tous les hyperplans de E alors ${}^tA = \lambda I_n$, où A est la matrice de u dans une base orthonormée, puis que u est une homothétie.
3. Montrer que si u laisse stable tous les sous-espaces de dimension $r \in [\![2, n-2]\!]$ alors u est une homothétie.

IV Éléments propres de matrices symétriques

Exercice 32 **(CCP PSI 2015)** *[Solution]*

1. Justifier que $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et donner une base orthonormale de vecteurs propres.
2. Donner une CNS sur (u_0, v_0, w_0) pour que les suites (u_n), (v_n) et (w_n) convergent : $\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases}$

Exercice 33 **(CCP MP 2009)** *[Solution]*
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; trouver P telle que $PA\,{}^tP$ soit diagonale.

Exercice 34 **(TPE-EIVP PSI 2018)** *[Solution]*
Soient $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$

1. Déterminer les espaces propres de K.
2. En déduire une matrice $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPM(a, b, c)P$ soit diagonale, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 35 **(Centrale PSI 2019)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique

1. Montrer que les valeurs propres de A sont réelles ; indication : calculer ${}^t\overline{X}AX$
2. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telle que $a_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } j = n \\ j & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ Calculer $\mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{Tr}(A^2)$ et en déduire les valeurs propres de A

Exercice 36 **(CCP PC 2009)** *[Solution]*
Montrer que $B = {}^tAA$, avec $A \in \mathcal{M}_{5,10}(\mathbb{R})$ est diagonalisable et que 0 est valeur propre de B. (*que dire de l'ordre de multiplicité de* 0 *pour* B *?*)

Exercice 37 **(ENTPE-EIVP PC 2007)** *[Solution]*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; montrer que si $M + {}^tM$ est nilpotente alors ${}^tM = -M$.

Exercice 38 **(CCP PSI 2015)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente telle que $A\,{}^tA = {}^tAA$

1. Montrer que ${}^tAA$ est nilpotente
2. Trouver A.

Exercice 39 **(ENTPE-EIVP PC 2009)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p. Montrer que ${}^tAA$ est inversible.

Exercice 40 **(CCP PSI 2010)** *[Solution]*
Soit A carrée réelle et $B = A\,{}^tA - {}^tAA$. Montrer que si $\mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}^+$ alors $B = 0$.
indication : calculer $\mathrm{Tr}(B)$.

Exercice 41 **(Telecom SudParis PC 2009)** *[Solution]*
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ distinctes ou non. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{(i,j)} a_{i,j}^2$.

Exercice 42 **(Centrale MP 2010)** *[Solution]*
Soit A matrice carrée réelle d'ordre n. Montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est exactement le nombre de valeurs propres non nulles (comptées avec multiplicité) de ${}^tAA$.

Exercice 43 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ non nulle ; montrer que $\dfrac{(\mathrm{Tr}\,A)^2}{\mathrm{Tr}(A^2)} \leqslant \mathrm{rg}(A)$.

Exercice 44 **(X/ENS PSI 2021)** *[Solution]*
Soit X, Y des matrices symétriques réelles de même taille.
Montrer que $\mathrm{Tr}(XYXY) \leqslant \mathrm{Tr}(X^2Y^2)$; on s'intéressa d'abord au cas où l'une des matrices est diagonale.

Exercice 45 **(Centrale PSI 2019)** *[Solution]*
Soient $E_1, \ldots, E_n$ n parties 2 à 2 distinctes de $[\![1, n]\!]$. On suppose que toutes ces parties sont de cardinal c et que toutes les intersections de 2 de ces parties ont un cardinal égal à d.
On définit la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in E_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. a) Calculer ${}^tBB$ et l'exprimer en fonction de I_n et $J_n = (1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
   b) Montrer que ${}^tBB$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
   c) En déduire que B est inversible.
2. On suppose $BJ_n = J_nB$ dans la suite de l'exercice. Quelle est la signification de cette hypothèse ?
3. En partant de ${}^tBBJ_n$, trouver une relation entre n, c et d.
   indication : calculer $\|BJ_n\|^2$

Exercice 46 **(IMT PSI 2019)** *[Solution]*
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, $a \in E$ unitaire et $k \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Montrer que $f : x \mapsto x + k(x|a)a$ est symétrique. Montrer que f est un automorphisme de E. Etudier les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Exercice 47 **(Mines-Télécom PSI 2021)** *[Solution]*
Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $< P|Q >= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(\alpha)Q^{(k)}(\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. Montrer que $P \mapsto (X - \alpha)P'$ est un endomorphisme symétrique de E.

Exercice 48 **(Mines-Ponts PC 2006)** *[Solution]*
Dans $E = \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, montrer que T défini par $T(f) = u'f' + uf''$, avec $u \in E$, $u(0) = u(1) = 0$ est un endomorphisme symétrique.

Exercice 49 *[Solution]*
Soit f endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ euclidien, $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ ses valeurs propres.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda_1\|x\|^2 \leqslant (f(x)|x) \leqslant \lambda_n\|x\|^2$. *(Telecom SudParis PSI 2015)*
2. Montrer que si $x \neq 0$ vérifie $(f(x)|x) = \lambda_n\|x\|^2$ alors x est un vecteur propre de f.

3. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E telle que $\forall i \in [\![1,n]\!], (f(e_i)|e_i)=\lambda_i$. Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormée de vecteurs propres.

Exercice 50 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*

Soient E un espace euclidien, $u_1,\dots,u_n$ des endomorphismes symétriques de E tels que $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{rg}(u_k) = \dim(E)$ et $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (u_k(x)|x)$

1. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} u_k - id$ est diagonalisable.
2. En déduire $\sum_{k=1}^{n} u_k = id$.

   indication : montrer que $\mathrm{Sp}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k - id\right) = \{0\}$
3. Montrer que $E = \overset{\perp}{\bigoplus_{1\leqslant k\leqslant n}} \mathrm{Im}(u_k)$ et que les u_k sont des projecteurs orthogonaux tels que $u_i \circ u_j = 0$ si $i \neq j$.
   indication : commencer par la somme directe, puis projecteurs tels que $u_i \circ u_j = 0$ et finir par l'orthogonalité des images.

Exercice 51 **(ENSAM PSI 2010)** *[Solution]*
On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique.

1. Que dire des valeurs propres de $B = {}^tAA$, où $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$?
2. On suppose que $(X_1,\dots,X_n)$ et $(AX_1,\dots,AX_n)$ sont deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$ Montrer que $X_1,\dots,X_n$ sont des vecteurs propres de B.

Exercice 52 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*
Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E tel que $\mathrm{Tr}(u)=0$. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ n'ait que des coefficients nuls sur la diagonale.
indication : raisonner par récurrence sur n et commencer par trouver (en utilisant une bon de vecteurs propres) un vecteur tel que $u(e) \perp e$.

Exercice 53 **(ENTPE-EIVP PSI 2012)** *[Solution]*
Soient S une matrice symétrique réelle et D diagonale dont les coefficients diagonaux sont ceux de S. On suppose S et D semblables. En calculant $\mathrm{Tr}(S^2)$ de deux façons, montrer que $S = D$.

Exercice 54 **(Mines-Ponts MP 2011)** *[Solution]*
Montrer que pour le produit scalaire $(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$, l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\phi(P) = (1-X^2)P'' - 2XP'$ est un endomorphisme symétrique. Déterminer ses valeurs propres.

Exercice 55 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*
Soient E un espace euclidien, p et q deux projecteurs orthogonaux

1. Montrer que p est symétrique
2. Montrer que $p\circ q\circ p$ est symétrique.
3. Montrer que $(\mathrm{Im}(p)+\ker(q))^{\perp} = \ker(p)\cap\mathrm{Im}(q)$
4. Montrer que $p\circ q$ est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(p\circ q) \subset [0,1]$
   indication : commencer par vérifier que $p\circ q\circ p$ induit un endomorphisme DZ sur $\mathrm{Im}(p)$ *puis compléter une base de vecteurs propres de cet endomorphisme induit par des bases de* $\ker(q)$ *et* $(\mathrm{Im}(p)+\ker(q))^{\perp}$. *Vérifier* $\mathrm{Sp}(p\circ q\circ p) \subset [0,1]$

V Matrices symétriques positives

Exercice 56 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Solution]*
Soit A symétrique réelle définie positive ($\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{+*}$)

1. Montrer que pour $r>0$, $A + rI_n$ est aussi symétrique définie positive.
2. Montrer que $B = (A - rI_n)(A+rI_n)^{-1}$ est symétrique et que $\mathrm{Sp}(B) \subset]-1,1[$.

Exercice 57 **(TPE-EIVP PSI 2018)** *[Solution]*
Sur $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on définit le produit scalaire $(X|Y) = {}^tXY$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tM = M^p$, avec $p \geqslant 2$; on pose $N = M^{p+1}$.

1. Montrer que $(NX|X) = \|MX\|^2$ pour $X \in E$.
2. Montrer que $N^p = N$; que peut-on en déduire pour les valeurs propres de N ?
3. Établir $N^2 = N$.
4. Montrer que $\ker(M) = \ker(N)$ et $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Im}(N)$.

Exercice 58 **(Mines-Ponts PSI 2021)** *[Solution]*
Soit $(U, V) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $\forall X \in \mathbb{R}^n, (UX|X) \geqslant 0$ et $(VX|X) \geqslant 0$, $(\,|\,)$ désignant le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\det(U + V) \geqslant \det(U) + \det(V)$. On pourra commencer par le cas où U et V ne sont pas inversibles, puis $V = I_n$ et enfin $V \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

Exercice 59 **(Mines-Ponts PSI 2008)** *[Solution]*

1. Montrer que si u est un endomorphisme symétrique, ses valeurs propres sont toutes positives si et seulement si $\forall x, (u(x)|x) \geqslant 0$. On dit alors que u est positif.
2. Soit u et v deux endomorphismes symétriques positifs avec u inversible, montrer que les valeurs propres de $u \circ v$ sont toutes positives.
   indication : si U est inversible, écrire $U = S^2$ et vérifier UV et SVS sont semblables.

Exercice 60 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique ; on suppose $\mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

1. Montrer qu'il existe une unique matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $\mathrm{Sp}(R) \subset \mathbb{R}^{+*}$ et $B = R^2$.
2. En déduire que AB est diagonalisable.
   indication : vérifier que AB est semblable à RAR
3. Montrer que si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ alors $\mathrm{Sp}(AB) \subset \mathbb{R}^+$.

Exercice 61 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle, montrer que $\mathrm{Tr}(AA^T) > 0$
2. Soit $S \in \mathcal{E}$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^T A$
3. Soit $(S, S') \in \mathcal{E}^2$. Montrer $\mathrm{Tr}(SS') > 0$

Exercice 62 **(Mines-Ponts PSI 2013)** *[Solution]*
Montrer que M symétrique réelle d'ordre n, de coefficients $m_{i,j}$ est définie positive si et seulement si il existe un produit scalaire ϕ tel que $m_{i,j} = \phi(e_i, e_j)$, où $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 63 **(CCP PSI 2013)** *[Solution]*
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E espace euclidien, symétrique de valeurs propres positives.

1. Montrer que si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E alors $\mathrm{Tr}(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (f(e_i)|e_i)$.
2. Soit g un autre endomorphisme symétrique ayant des valeurs propres positives ; montrer que $\mathrm{Tr}(g \circ f) \geqslant 0$.

Exercice 64 **(CCP PSI 2015)** *[Solution]*

1. Soit A antisymétrique réelle, montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n, (AX|X) = 0$.
2. Soit B symétrique réelle de valeurs propres strictement positives, montrer que $A + B$ est inversible.

Exercice 65 **(Mines-Ponts PSI 2016)** *[Solution]*
Soient p et q deux projecteurs orthogonaux de E, espace euclidien.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de $u = p + q$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
   indication : un projecteur orthogonal est un endomorphisme symétrique.
2. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) \subset [0, 2]$ puis déterminer $\ker(u)$ et $\ker(u - 2id)$.

Exercice 66 **(Mines-Ponts PSI 2017)** *[Solution]*
Dans E euclidien, on note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques à valeurs propres positives

1. Montrer que si $f \in \mathcal{S}^+(E)$ alors $E = \ker(f) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(f)$ et qu'il existe $h \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $f = h^2$.
2. Soit $g \in \mathcal{S}^+(E)$; montrer que $\ker(f + k) = \ker(f) \cap \ker(g)$ et $\mathrm{Im}(f + g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 67 **(CCP PSI 2009)** *[Solution]*

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E euclidien et f défini par $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (e_k|x)e_k$.

1. Montrer que f est linéaire, symétrique à valeurs propres strictement positives.
2. Montrer qu'il existe un unique $g \in \mathcal{L}(E)$ symétrique à valeurs propres strictement positives, tel que $g^2 = f^{-1}$.

Exercice 68 **(CCP PSI 2011)** *[Solution]*
Soient A et B symétriques réelles positives. Montrer que $\operatorname{Tr}(AB) \leqslant \operatorname{Tr}(A)\operatorname{Tr}(B)$.
indication : penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et montrer que $\operatorname{Tr}(A^2) \leqslant (\operatorname{Tr}(A))^2$.

Exercice 69 **(CCP PSI 2013)** *[Solution]*
Pour $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et A symétrique réelle positive d'ordre n, montrer que $|\operatorname{Tr}(AU)| \leqslant \operatorname{Tr}(A)$.

Exercice 70 **(ENSAM PSI 2014)** *[Solution]*

1. Soient A et B symétriques telles que $\operatorname{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ et $\operatorname{Sp}(B) \subset \mathbb{R}^+$. Montrer que $\operatorname{Tr}(AB) \leqslant \operatorname{Tr}(A)\operatorname{Tr}(B)$.
   indication : inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canoique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $M \mapsto (\operatorname{Tr}({}^tMM))^{1/2}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|MN\| \leqslant \|M\| \times \|N\|$.

Exercice 71 **(Mines-Ponts MP 2006)** *[Solution]*
Soit A une matrice réelle et inversible. Montrer qu'il existe une matrice O orthogonale et une matrice S symétrique définie positive (${}^tXAX > 0$ si $X \neq 0$) telle que $A = OS$.
indication : raisonner par condition nécessaire pour trouver S.

Exercice 72 **(Mines-Ponts PSI 2016)** *[Solution]*
On note $S_n(I)$ l'ensemble des matrice A, symétriques réelles, telles que $\operatorname{Sp}(A) \subset I$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathbb{R}^n, \left(\min\limits_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \lambda\right) \times {}^tXX \leqslant {}^tXAX$.
2. Montrer que $S_n(I)$ est convexe (ie si $(A, B) \in S_n(I)^2$ alors $\forall t \in [0, 1], tA + (1 - t)B \in S_n(I)$).

Exercice 73 **(EIVP PSI 2016)** *[Solution]*
Soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ symétrique. Comparer $\sup\limits_{\|x\|=1} \|\phi(x)\|$ et $\sup\limits_{\|x\|=1} |<\phi(x)|x>|$.

Exercice 74 **(Centrale PSI 2019)** *[Solution]*
On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est une contraction de E euclidien si $\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant \|x\|$

1. Montrer que $f \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est une contraction si et seulement si $\forall \lambda \in \operatorname{Sp}(f), |\lambda| \leqslant 1$.
2. Montrer que, si $f \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, $\forall x \in E, \|P(f)(x)\| \leqslant \sup\limits_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} |P(\lambda)|\,\|x\|$
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe S symétrique à valeurs propres positives telle que ${}^tMM = S^2$ puis en déduire une condition sur $\operatorname{Sp}({}^tMM)$ pour que M soit une contraction.

VI Équations matricielles

Exercice 75 **(CCP PSI 2016)** *[Solution]*
Trouver A, symétrique réelle telle que $A^3 + 4A^2 + 5A = 0$.

Exercice 76 **(CCP PSI 2016)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, non nulle, telle que $A^2 = {}^tA$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A.
2. On suppose que $0 \in \operatorname{Sp}(A)$. Déterminer $\operatorname{Sp}(A)$ et montrer que A est orthogonalement semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 77 **(CCP PSI 2013)** *[Solution]*
Soit A symétrique réelle telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $A^k = I_n$. Montrer que $A^2 = I_n$.

Exercice 78 **(CCP PSI 2017)** *[Solution]*
Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que ${}^tMM = M\,{}^tM$ et $M^2 + 4I_2 = 0$.

1. Montrer que ${}^tMM$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.
2. Trouver un polynôme de degré 2 annulateur de ${}^tMM$, en déduire son spectre, puis que $\dfrac{1}{2}M$ est orthogonale.
3. Trouver M.

Exercice 79 **(CCINP PSI 2018)** *[Solution]*
Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + {}^tM = I_n$.

1. Trouver un polynôme annulateur de M de degré 4.

2. Montrer que $M - I_n$ est inversible.

3. Trouver M

Exercice 80 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M\left({}^tMM\right)^2 = I_n$.

1. À l'aide du déterminant, montrer que M est inversible.

2. En déduire que M est symétrique.

3. Conclure que $M = I_n$.

Exercice 81 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Solution]*
Soient A et B symétriques réelles telles que $B = A^3 + A + I_n$. Montrer que $A \in \mathbb{R}[B]$.
indication : diagonaliser A et polynômes de Lagrange.

Exercice 82 **(Centrale PSI 2019)** *[Solution]*
Soient A et B symétriques réelles pour lesquelles il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^{2p+1} = B^{2p+1}$. Montrer que $A = B$.
indication : s'inspirer de l'exercice fait en cours (unicité de B symétrique positive telle que $A = B^2$) pour montrer que A et B sont diagonalisables dans une même base. Si $A^2 = B^2$, a-t-on $A = B$?

VII Matrices antisymétriques

Exercice 83 **(CCP PC 2012)** *[Solution]*
Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique réelle est dans $\mathbb{R}^+$ et que ses valeurs propres sont dans $i\mathbb{R}$.

Exercice 84 **(Centrale PSI 2015)** *[Solution]*

1. Soit $\lambda > 0$. Montrer qu'il n'existe aucune matrice antisymétrique réelle A telle que $A^2 = \lambda I_n$.

2. Donner une CNS sur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe A, antisymétrique réelle telle que $A^2 = \lambda I_n$.

3. Soit $\lambda < 0$ et A antisymétrique réelle telle que $A^2 = \lambda I_n$. Montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc étant $\begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 85 **(Mines-Ponts PC 2013)** *[Solution]*

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tAA$ a toutes ses valeurs propres positives et que $\ker({}^tAA) \subset \ker(A)$.

2. Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tU = -U$. U est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
indication : U^2 est diagonalisable puis utiliser un polynôme annulateur

VIII Espaces normés euclidiens

Exercice 86 **(Mines-Ponts PSI 2014)** *[Solution]*
$\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique.

1. Montrer que $N(A) = \sup\limits_{\|X\|_2=1} \|AX\|_2$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $N(A) = \max \mathrm{Sp}({}^tAA)$

Solutions

Exercice 1 *[sujet]* Si $u_1 = \dfrac{1}{3}u$, $u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$ et $u_3 = u_1 \wedge u_2 = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}(-4,1,1)$ alors $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une bond dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Si $P = \dfrac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -4 \\ 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 1 \\ 2\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(r) = P\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r)\,{}^tP$

Exercice 2 *[sujet]* Si $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$, $u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ et $u_3 = u_1 \wedge u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$ alors $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une bond dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi/5 & -\sin\pi/5 \\ 0 & \sin\pi/5 & \cos\pi/5 \end{pmatrix}$. Si $P = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(r) = P\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r)\,{}^tP$

Exercice 3 *[sujet]* Symétrie orthogonale par rapport à $\ker(A - I_3) = \{(x,y,z) | 3x - 2y + z = 0\}$

Exercice 4 *[sujet]* Rotation autour de $(1,1,0)$ d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$

Exercice 5 *[sujet]* A est orthogonale, $\det(A) = +1$ donc rotation d'axe $u = (3,1,-1)$; $\mathrm{Tr}(A) = 1 + 2\cos(\theta) = -\dfrac{2}{3}$ donc $\cos\theta = -\dfrac{5}{6}$ et $[u, e_1, r(e_1)] > 0$ donc $\theta = \arccos\left(-\dfrac{5}{6}\right)$.

Exercice 6 *[sujet]* Rotation autour de $(2,-1,2)$ d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 7 *[sujet]* On vérifie $M^2 = M$ et ${}^tM = M$ donc M est la matrice du projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(M) = \ker(M - I_4) = \mathrm{Vect}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0), \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)\right\}$ puis $\ker(M) = \mathrm{Im}(M)^\perp = \mathrm{Vect}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0), \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)\right\}$

Exercice 8 *[sujet]* $C_2 \perp C_1$ si et seulement si $c = -2$ puis pour cette valeur A est une matrice de rotation si et seulement si $C_3 = C_1 \wedge C_2 = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Pour ces valeurs, A est la matrice de la rotation autour de $u = (1,1,1)$ et d'angle $-\arccos\left(\dfrac{11}{14}\right)$

Exercice 9 *[sujet]* $A \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si (C_1, C_2, C_3) bon et $\det(A) = 1$ donc si et seulement si $(S)\left\{\begin{array}{r} p^2 + q^2 + r^2 = 1 \\ pr + qp + rq = 0 \\ p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr \end{array}\right.$
De plus p, q, r sont racines de $P = (X-p)(X-q)(X-r) = X^3 - (p+q+r)X^2 + (pq+rq+rp)X - pqr$. Comme $p^2+q^2+r^2 = (p+q+r)^2 - 2(pq+pr+qr)$ et, avec $P(p) = 0$, $p^3 = (p+q+r)p^2 - (pq+pr+qr)p + pqr$ (idem pour q et r), on a $p^3+q^3+r^3-3pqr = (p+q+r)(p^2+q^2+r^2) - (pq+pr+rq)(p+q+r)$ donc $(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} pr + pq + rq = 0 \\ p + q + r = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow P = X^3 - X^2 - pqr$.

Exercice 10 *[sujet]*

1. Comme P est réel, on a $P(e^{i\theta}) = e^{i\phi}$ et $P(e^{-i\theta}) = e^{-i\phi}$; on vérifie alors que si $R(\theta)$ est une matrice de rotation de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ alors $P(R(\theta)) = R(\phi)$ (car les valeurs propres de $R(\theta)$ sont $e^{\pm i\theta}$) ; on a alors $P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(1) & 0 \\ 0 & R(\phi) \end{pmatrix}$ donc est bien une rotation.
2. R_0 est orthogonale et $\det(R_0) = 1$; r_0 est la rotation autour de $u = (1,1,1)$ et d'angle $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$. On a bien $P(1) = 1$ et $P\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ donc $P(r_0)$ est la rotation autour de u et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 11 *[sujet]* $A^4 = {}^tA^2 = A$ donc $X(X-1)(X^2+X+1)$ annule A est SARS dans $\mathbb{C}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0, 1, j, j^2\}$. Si $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ alors A est DZ donc semblable à 0 donc $A = 0$; si $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$, on a de même $A = I_2$; si $\mathrm{Sp}(A) = \{0,1\}$ alors $\mathcal{X}_A = X(X-1)$ donc $A^2 = A = {}^tA$, A est symétrique réelle donc DZ dans une bon et semblable à $E_{1,1}$. Enfin si $\mathrm{Sp}(A) = \{j, j^2\}$ (comme A est réelle, il n'y pas d'autre possibilité) alors $\mathcal{X}_A = X^2+X+1$ donc $A^{-1} = -A - I_2 = A^2 = {}^tA$, A est orthogonale, $\det(A) = j \times j^2 = 1$ donc A est une rotation $R(\theta)$ telle que $R(3\theta) = I_2$ et $R(\theta) \neq I_2$. Il y a deux solutions $R\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ et $R\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ qui sont orthogonalement semblables entre elles (inverser les vecteurs de base pour garder une bon, mais plus directe).

Exercice 12 *[sujet]*

1. On a $M^4 = M$ et comme M est inversible, $M^3 = I_n$, ce qui donne bien ${}^tM = M^{-1}$ donc M est orthogonale. Si $X \in \ker(M - I_n)^\perp$ et $Y \in \ker(M - I_n)$ alors $(MX|Y) = (MX|MY) = (X|Y) = 0$.

2. On a $M^3 = I_n$ donc $\det(M) = +1$, M est une rotation. Pour $n = 2$, si $M = R(\theta)$ alors $M^2 = {}^tM$ si et seulement si $3\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$; on a donc trois solutions I_2, $R\left(\pm\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Pour $n = 3$, M est orthogonalement semblable à $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & R(\theta)\end{pmatrix}$ et on vérifie que M est solution si et seulement si $R(\theta)$ est une des trois solutions pour $n = 2$; réciproquement, toute matrice orthogonalement semblable à une de ces trois matrices est bien solution.

Exercice 13 *[sujet]* **1.** A est orthogonale et symétrique, $\det(A) < 0$ donc s est la réflexion par rapport à $P = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}^{\perp}$

2. Si s et r commutent alors $D = E_{-1}(s) = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$ est une droite stable par r. Si $\theta \neq \pi$, la seule droite stable par une rotation est l'axe donc r est une rotation d'axe $u = (1,1,1)$ (qui sont bien solutions). Si $\theta = \pi$, r est un demi-tour (ou une symétrie orthogonale par rapport à une droite) ; r est donc une rotation autour de u, ou un demi-tour autour d'une droite orthogonale à u (qui sont bien solutions à nouveau).

3. $\mathrm{Tr}(r) = 0$ donc r est une rotation d'angle $\pm\dfrac{2\pi}{3}$ donc r est une rotation autour de u ; les deux rotations sont bien solutions

Exercice 14 *[sujet]* **1.** Si $D = \mathrm{Vect}\, u$ et $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une bond, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & R(\theta)\end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & I_2\end{pmatrix}$ qui commutent.

2. $D = \mathrm{Vect}\, u$ est une droite stable par s donc elle est engendré par un vecteur propre de s. On a donc deux possibilité : soit $u \in E_{-1}(s)$ est on est ramené à la question précédente, soit $u \in E_1(u)$ et on peut compléter en une bond $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ qui ne commutent que si $\sin\theta = 0$ donc si r est un demi-tour.

Exercice 15 *[sujet]* **1.** $\ker(f) = \mathrm{Vect}\{u\}$ et $f \circ f = (u|x)u - \|u\|^2 x$

2. $A = \begin{pmatrix}0 & -c & b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{pmatrix}$ et $A^2 = \dots$

3. On a $f^3 = -\alpha^2 f$ donc $f^{2n} = (-\alpha^2)^{n-1} f^2$ pour $n \geqslant 1$ et $f^{2n+1} = (-\alpha^2)^n f$ pour $n \geqslant 0$.

Si on pose $e_1 = \dfrac{1}{\alpha}u$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une bond, on vérifie que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\alpha\\ 0 & \alpha & 0\end{pmatrix}$ puis que $\exp(f)$ est la rotation autour de u et d'angle α.

Exercice 16 *[sujet]* $m_{i,j} = (e_i|f(e_j))$ donc $\left|\displaystyle\sum_{i,j} m_{i,j}\right| = |(f(u)|u)|$ si $u = e_1 + \cdots + e_n$, on en déduit par C-Sch, $|(f(u)|u)| \leqslant \|f(u)\|\|u\| = \|u\|^2 = n$.

$\displaystyle\sum_i m_{i,j}^2 = 1$ donc $|m_{i,j}| \leqslant 1$ et $n = \displaystyle\sum_{i,j} m_{i,j}^2 \leqslant \sum_{i,j} |m_{i,j}| \overset{\text{C-Sch}}{\leqslant} \left(\sum_{i,j} m_{i,j}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i,j} 1^2\right)^{1/2} = n^{3/2}$

Exercice 17 *[sujet]* $\|u(x)\|^2 = \alpha^2 < x, a >^2 \|a\|^2 + \|x\|^2 - 2\alpha < x, a >^2$ donc $u \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si $\alpha = 0$ ou $\alpha = \|a\|^{-2}$

Si $\alpha = 0$, $u = -id$ et si $\alpha = \|a\|^{-2}$ alors (vérifier que u est symétrique) u est la réflexion par rapport à l'hyperplan $\mathrm{Vect}\{u\}^{\perp}$

Exercice 18 *[sujet]* **1.** Si $\|e_i\| = \|e_j\|$ alors $e_i + e_j \perp e_i - e_j$ donc $u(e_i) + u(e_j) \perp u(e_i) - u(e_j)$ ce qui donne $\|u(e_i)\|^2 - \|u(e_j)\|^2 = (u(e_i) + u(e_j)|u(e_i) - u(e_j)) = 0$

2. On écrit $x = \sum x_i e_i$ avec (e_i) bon et on a $u(x) = \sum x_i u(e_i)$ et par Pythagore, $\|u(x)\|^2 = \sum x_i^2 \|u(e_i)\|^2 = \mu\|x\|^2$.

Si $\mu = 0$, $g = id$ convient ; sinon on pose $g = \dfrac{1}{\mu}u$ et on vient de vérifier que $g \in \mathcal{O}(E)$

Exercice 19 *[sujet]* $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (u(e_i)|e'_j)^2 = \|u(e_i)\|^2$ car (e'_j) est une bon ; puis $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2$. Si on note $A = (a_{i,j})$ la matrice de u dans (e_i) alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2 = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \mathrm{Tr}({}^tAA)$; si on remplace $\mathcal{B}$ par une autre bon $\mathcal{B}''$ alors $P = P(\mathcal{B} \to \mathcal{B}'') \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $A = PA''\,{}^tP$ donc $\mathrm{Tr}({}^tAA) = \mathrm{Tr}(P\,{}^tA''A''P) = \mathrm{Tr}({}^tA''A'')$ ne dépend pas de la bon (e_i)

Exercice 20 *[sujet]* **1.** Si $f(x)=\pm x$ alors $\pm\|x\|^2=0$

2. On pose $y=(id-f)^{-1}(x)$ et on a $\|g(x)\|^2=\|y+f(y)\|^2=\|y\|^2+\|f(y)\|^2$ (Pythagore) et $x=y-f(y)$ donc on vérifie aussi $\|x\|^2=\|y\|^2+\|f(y)\|^2$.
Si $g(x)=-x$ alors $y+f(y)=-y+f(y)$ donc $y=0$ et $x=0$

3. On pose $g=(id+g)^{-1}\circ(g-id)=(g-id)\circ(id+g)^{-1}$ (car $id+g$ et $id-g$ commutent) et on a, avec $y=(id+g)^{-1}(x)$, $(f(x)|x)=(g(y)-y|y+g(y))=0$ car g est orthogonal

Exercice 21 *[sujet]* **1.** $M\,{}^tM=\begin{pmatrix}1+{}^tCC & 0\\ 0 & I_n+C\,{}^tC\end{pmatrix}$ puis $1+{}^tCC=1+\sum_{i=1}^n a_i^2\neq 0$ et $\det(I_n+C\,{}^tC)=(-1)^n\mathcal{X}_{C\,{}^tC}(-1)$. ${}^tXC\,{}^tCX=\|{}^tCX\|^2\geqslant 0$ donc $-1\notin\mathrm{Sp}(C\,{}^tC)$ et $\det(I_n+C\,{}^tC)\neq 0$.

2. ${}^tNN=M\,{}^tM^{-1}M^{-1}\,{}^tM$; on vérifie ${}^tMM=M\,{}^tM$ ce qui donne ${}^tMM^{-1}=M^{-1}\,{}^tM$.

Exercice 22 *[sujet]* **1.** $(f(u)|u)\overset{\mathcal{O}(E)}{=}(f^2(u)|f(u))=-(f(u)|u)$

2. Seules $R(\pm\pi/2)$ conviennent

3. On aurait $\det(f)^2=(-1)^3=-1$

4. $(f(x+y)|x+y)=0$ donne $(f(x)|y)=-(y|f(x))$ en développant ; la matrice de f, dans une bon, est donc antisymétrique et orthogonale : ${}^tA=-A=A^{-1}$ donc $A^2=-I_n$

Exercice 23 *[sujet]* **1.** on a $9\|x\|^2=\|2Mx+x\|^2=4\|Mx\|^2+4(Mx|x)+\|x\|^2\overset{M\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}{=}4(Mx|x)+5\|x\|^2$

2. On peut en déduire $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)\subset\{1\}$ car si $Mx=\lambda x$ avec $x\neq 0$ alors $\|x\|^2=(Mx|x)=\lambda\|x\|^2$ mais on peut faire plus précis. On a ${}^tMM=I_n$ et $(2M+I_n)(2\,{}^tM+I_n)=9I_n$ donc $M+{}^tM=2I_n$. On pose $A=M-I_n$ et on a ${}^tA+A=0$ donc M s'écrit $M=I_n+A$ avec ${}^tA=-A$. Comme ${}^tMM=I_n$, on a $A^2=0$ puis $\|AX\|^2={}^tX\,{}^tAAX=-{}^tXA^2X=0$ donc $A=0$ et $M=I_n$.

Exercice 24 *[sujet]* **1.** Existence cf cours ; si $P=\Omega T=\Omega' T'$ alors $M=(\Omega')^{-1}\Omega=T'T^{-1}$ est orthogonale et triangulaire supérieure ; on en déduit $M=I_n$ car M^{-1} est aussi triangulaire supérieure et $M^{-1}={}^tM$ est triangulaire inférieure donc M est diagonale, puis $\|C_j\|=1$ donne $\lambda_i=\pm 1$ donc $\lambda_i=1$ car les coefficients diagonaux sont (comme ceux de T et T') positifs.

2. Si A n'est pas inversible, $\det(A)=0$ donc l'inégalité est évidente. Si A est inversible, on écrit $A=\Omega T$ et on a $\det(A)^2=\det(T)^2=\prod_{i=1}^n t_{i,i}^2$ et (avec $\Omega^{-1}=(p_{i,j})$) $t_{i,i}^2=\left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}p_{j,i}\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2\sum_{j=1}^n p_{j,i}^2$ et enfin $\sum_{j=1}^n p_{j,i}^2=1$ car Ω^{-1} est orthogonale.

Exercice 25 *[sujet]* **1.** $S_n+iT_n=\dfrac{1}{n}\dfrac{e^{i(n-1)\theta/2}\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$ donc $\lim S_n=\lim T_n=0$

2. En dimension 2, $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n R(\theta)^k=\begin{pmatrix}S_n & -T_n\\ T_n & S_n\end{pmatrix}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$; en dimension 3, $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n R(\theta)^k=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & S_n & -T_n\\ 0 & T_n & S_n\end{pmatrix}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

3. Si $x\in\ker(u-id)$ alors $(x|(u-id)(y))=(x|u(y)-y)=(x|y)-(u(x)|u(y))$ car $u(x)=x$. On a $\mathrm{Im}(u-id)\perp\ker(u-id)$ et on obtient l'égalité avec les dimensions. On écrit $x=a+(b-u(b))$, puis $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n u^k(x)=a+\dfrac{1}{n}(u(b)-u^{n+1}(b))$ et on vérifie $\dfrac{1}{n}(u(b)-u^{n+1}(b))\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ car $\|u^{n+1}(b)\|=\|b\|$ (suite bornée). La suite $\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n u^k\right)$ converge donc vers la projection orthogonale sur $\ker(u-id)$.

Exercice 26 *[sujet]* **1.** si $a\in\ker(v)$ alors $(a|v(v))=(a|u(b)-b)\overset{u(a)=a}{=}(u(a)|u(b))-(a|b)=0$ car u orthogonal ; on trouve l'égalité par le théorème du rang

2. On écrit $a=a_0+u(b)-b$ et on trouve $x_n=a_0+\dfrac{1}{n}(u^{n+1}b-b)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ car $\|u^{n+1}(b)\|=\|b\|$ (donc borné)

Exercice 27 *[sujet]* **1.** cours

2. Si $x\in\ker(f-id)$ alors $(x|(f-id)(y))=(x|f(y)-y)=(x|y)-(f(x)|f(y))$ car $f(x)=x$. On a $I(f)\perp\mathbb{K}(f)$ et on obtient l'égalité avec les dimensions.

3. $I(f) = K(f)^{\perp}$ et $\text{Vect}\{u_1,\dots,u_p\}^{\perp} \subset K(f)$ car $s_u(x) = x$ si $x \perp u$. Pour l'inclusion inverse, on raisonne par récurrence sur p (évident si $p = 1$) : on pose $f = s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_p} = s_{u_1} \circ g$ et si $x \in K(f)$ alors $f(x) = x$ puis $s_{u_2} \circ \cdots \circ s_{u_p}(x) - x = s_{u_1}(x) - x \in I(g) \cap I(s_{u_1}) = \text{Vect}\{u_2,\dots,u_p\} \cap \text{Vect}\{u_1\}$ par HR appliquée à g ; les u_i étant libres, on en déduit $s_{u_2} \circ \cdots \circ s_{u_p}(x) - x = s_{u_1}(x) - x = 0$ donc $x \in K(g) \cap K(s_{u_1}) \overset{\text{HR}}{=} \text{Vect}\{u_2,\dots,u_p\}^{\perp} \cap \text{Vect}\{u_1\}^{\perp} \subset \text{Vect}\{u_1,\dots,u_p\}^{\perp}$.

Exercice 28 *[sujet]* **1.** $(f(x) + f^{-1}(x)|y) = (f(x)|y) + (x|f(y)) = (f(y) + f^{-1}(y)|x)$ donc $f + f^{-1}$ est symétrique. Soit x un vecteur propre de $f + f^{-1}$, on a $f^2(x) + x = \lambda f(x)$ donc $f^2(x) \in \text{Vect}\{x, f(x)\}$

2. On raisonne par récurrence sur $\dim(E)$: le résultat est évident en dimensions 1 et 2. Si on suppose le résultat en dimensions $n-1$ et $n-2$ et soit f est un endomorphisme orthogonal de E, de dimension n ; si f admet une valeur propre (associée à e) alors elle vaut ± 1 et $D = \text{Vect}\{e\}$ est une droite stable, sinon on choisit un vecteur x comme dans la première question et $P = \text{Vect}\{x, f(x)\}$ est un plan stable par f. Dans les deux cas $D^{\perp}$ ou $P^{\perp}$ sont stables aussi et l'endomorphisme induit par f sur cet orthogonal est un endomorphisme orthogonal auquel on peut donc appliquer l'HR

Exercice 29 *[sujet]* **1.** ${}^t\overline{Z}AZ = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{Z}Z = \overline{\lambda}\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2$ si Z est un vecteur propre de A. D'autre part, ${}^t\overline{Z}AZ = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}\overline{z_i}z_j$ est réel car A est réelle (si on conjugue la somme double, cela revient à échanger les deux indices i et j). On en déduit $\overline{\lambda} = \dfrac{{}^t\overline{Z}AZ}{{}^t\overline{Z}Z} \in \mathbb{R}$ (c'est le début de la preuve du théorème spectral)

2. Si $\lambda = a + ib$ alors $A(X + iY) = (a + ib)(X + iY)$ donne $AX = aX - bY$ et $AY = bX + aY$. Reste à vérifier la liberté : si $Y = \alpha X$ (ou l'inverse), alors $A(1 + i\alpha)X = \lambda(1 + i\alpha)X$ donc X est un vecteur propre réel associé à la valeur propre non réelle λ (et A est réelle), c'est absurde si $X \neq 0$.

3. C'est une matrice orthogonale de taille 2 et sans valeur propre réelle (car λ en est une valeur propre non réelle donc la seconde est $\overline{\lambda}$) donc de la forme $R(\theta)$ (avec $\theta \in]0, 2\pi[$).

4. Le résultat est vrai pour $n = 1$ et $n = 2$ car les matrices $S(\theta)$ sont semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (et même $n = 3$) ; si on suppose le résultat vrai en dimensions $n-1$ et $n-2$ et si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on distingue si A possède une valeur propre réelle ou non : si A possède une valeur propre réelle, elle vaut $pm1$ et on trouve une droite stable F ; sinon, on introduit un plan stable F par **b**. Comme A est orthogonale, $F^{\perp}$ est stable par A donc on applique l'HR à l'endomorphisme (orthogonal) induit par A sur $F^{\perp}$ et on conclut dans une bon adaptée à $\mathbb{R}^n = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$.

Exercice 30 *[sujet]* $\mathcal{X}_A = X(X^2 + 2)$ donc une seule droite stable $E_0 = \text{Vect}\{(3, 0, 2)\}$.
Si P est un plan stable, $X \in P^{\perp}$ et $Y \in P$ alors $({}^tAX|Y) = (X|AY) = 0$ car $AY \in P$; on a même P est stable par A si et seulement si $P^{\perp}$ est stable par ${}^tA$ (réappliquer à ${}^tA$). Comme $\mathcal{X}_{{}^tA} = \mathcal{X}_A$, ${}^tA$ possède une seule droite stable $E_0({}^tA) = \text{Vect}\{(2, 0, 3)\}$ donc A possède un unique plan stable $P = E_0({}^tA)^{\perp}$.

Exercice 31 *[sujet]* **1.** fait en cours (réduction)

2. Si A laisse stable tous les hyperplans alors (cf ex 30) ${}^tA$ laisse toutes les droites stables donc ${}^tA = \lambda I_n$ et $A = \lambda I_n$.

3. Si $r \leqslant \dfrac{n}{2}$, toute droite est l'intersection de deux sev de dimension r : si $D = \text{Vect}\{e\}$, on complète en $(e, e_2, \dots, e_n)$ base de E puis $D = \text{Vect}\{e, e_2, \dots, e_r\} \cap \text{Vect}\{e, e_{r+1}, \dots, e_{2r-1}\}$, ces deux sev sont stables donc D aussi et on termine avec la première question. Si $r \geqslant \dfrac{n}{2}$, alors ${}^tA$ laisse stable tous les sev de dim $n - r \leqslant \dfrac{n}{2}$ et on termine avec ${}^tA$ qui vérifie ce que l'on a fait avant avec A.

Exercice 32 *[sujet]* **1.** Si $P = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ alors ${}^tPAP = \text{diag}(-1, -1, 1)$

2. si $(u_0, v_0, w_0) = x_0 + y_0$ avec $x_0 \in E_{-1}(A)$ et $y_0 \in E_1(A)$ alors $(u_n, v_n, w_n) = (-1)^n x_0 + y_0$ donc CV si et seulement si $x_0 = 0$ donc si et seulement si $(u_0, v_0, w_0) \in E_1(A)$, ie si et seulement si $u_0 = v_0 = w_0$

Exercice 33 *[sujet]* $P = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $,{}^tPAP = \text{diag}(3, 3, -3)$.

Exercice 34 *[sujet]* **1.** $E_0(K) = \text{Vect}\{(1, 0, -1)\}$, $E_{\sqrt{2}}(K) = \text{Vect}\{(1\sqrt{2}, 1)\}$ et $E_{-\sqrt{2}}(K) = \text{Vect}\{(1, -\sqrt{2}, 1)\}$

2. $M(a, b, c) = (a - b)I_3 + cK + bK^2$ donc $P = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$ convient

Exercice 35 *[sujet]* **1.** Cours (début de la preuve du théorème spectral)

2. $\mathrm{Tr}(A) = n$ et $\mathrm{Tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + n^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$
On a $\mathrm{rg}(A) = 2$ donc (A est DZ) $m_0(A) = \dim(E_0(A)) = n-2$; en DZ A, les deux dernières vp vérifient $\lambda + \mu = \mathrm{Tr}(A)$ et $\lambda^2 + \mu^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ donc $\lambda\mu = \frac{1}{2}[(\lambda+\mu)^2 - (\lambda^2+\mu^2)] = -\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$ donc λ et μ sont les deux racines de $X^2 - nX - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = 0$

Exercice 36 *[sujet]* $B \in \mathcal{S}_{10}(\mathbb{R})$ est DZ et $\mathrm{rg}(B) \leqslant \mathrm{rg}(A) \leqslant 5$ donc $m_0(B) \geqslant \dim(E_0(B)) \geqslant 5$

Exercice 37 *[sujet]* $M + {}^tM$ est symétrique réelle donc DZ, de plus X^k annule $M + {}^tM$ donc $\mathrm{Sp}(M + {}^tM) \subset \{0\}$ puis $M + {}^tM$ est semblable à 0, donc nulle.

Exercice 38 *[sujet]* **1.** Par commutativité, $({}^tAA)^n = {}^tA^nA = 0$

2. $B = {}^tAA$ est DZ (symétrique réelle), X^n annule B donc $\mathrm{Sp}(B) = \{0\}$ donc $B = 0$ puis $\|A\|^2 = \mathrm{Tr}(B) = 0$ donc $A = 0$.

Exercice 39 *[sujet]* ${}^tAA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $\mathrm{rg}({}^tAA) = \mathrm{rg}({}^tA) = p$

Exercice 40 *[sujet]* B est symétrique réelle donc DZ, $\mathrm{Tr}(B) = 0$ donc la seule vp possible de B est 0 ; B est semblable à la matrice nulle donc $B = 0$.

Exercice 41 *[sujet]* A est DZ donc $\sum \lambda_i^2 = \mathrm{Tr}(A^2)$ et $\mathrm{Tr}(A^2) = \mathrm{Tr}({}^tAA) = \|A\|^2 = \sum a_{i,j}$

Exercice 42 *[sujet]* ${}^tAA$ est symétrique réelle donc DZ et le nombre de vp non nulles de ${}^tAA$ est $\mathrm{rg}({}^tAA)$. Comme $\ker(A) = \ker({}^tAA)$, on a $\mathrm{rg}({}^tAA) = \mathrm{rg}(A)$.

Exercice 43 *[sujet]* $A = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)\,{}^tP$ avec $r = \mathrm{rg}(A)$, $\lambda_i \neq 0$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$; on a $\mathrm{Tr}(A)^2 = \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i\right)^2 \overset{\text{C−Sch}}{\leqslant} \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^r 1^2\right) = \mathrm{Tr}(A^2)\,\mathrm{rg}(A)$

Exercice 44 *[sujet]* Si $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)$ alors $(DY)_{i,j} = \lambda_i y_{i,j}$ donc (avec Y sym) $\mathrm{Tr}(DYDY) = \sum_{(i,j)} \lambda_i\lambda_j y_{i,j}^2 \overset{\text{C−Sch}}{\leqslant} \sqrt{\sum_{(i,j)} (\lambda_i y_{i,j})^2} \times \sqrt{\sum_{(i,j)} (\lambda_j y_{i,j})^2} = \sum_{(i,j)} (\lambda_i y_{i,j})^2$ en échangeant i et j. Enfin, $\mathrm{Tr}(D^2Y^2) = \sum_{(i,j)} \lambda_i^2 y_{i,j}^2$.
Sinon, $X = PDP^T$ $\mathrm{Tr}(XYXY) = \mathrm{Tr}(PDP^TYPDP^TY) = \mathrm{Tr}(DP^TYPDP^TTP) = \mathrm{Tr}(DZ)$ avec $Z = P^TYP$ symétrique réelle donc $\mathrm{Tr}(XYXY) \leqslant \mathrm{Tr}(D^2Z^2) = \mathrm{Tr}(D^2P^TY^2P) = \mathrm{Tr}(PD^2P^TY^2) = \mathrm{Tr}(X^2Y^2)$.

Exercice 45 *[sujet]* **1.** a) $({}^tBB)_{i,i} = \sum_{k=1}^n b_{k,i}^2 = \mathrm{Card}(E_i) = c$ et, si $i \neq j$, $({}^tBB)_{i,j} \sum_{k=1}^n b_{k,i}b_{k,j} = \mathrm{Card}(E_i \cap E_j) = d$ donc ${}^tBB = (c-d)I_n + dJ_n$

b) ${}^tBB$ est symétrique réelle et comme $\mathrm{rg}(J_n) = 1$, on trouve $\mathrm{rg}({}^tBB - (c-d)I_n) = 1$ donc $m_{c-d}({}^tBB) \overset{\text{DZ}}{=} \dim(E_{c-d}({}^tBB)) = n-1$; la dernière valeur propre est donc $\mathrm{Tr}({}^tBB) - (n-1)(c-d) = c + (n-1)d$

c) $c + (n-1)d > 0$ et si $c = d$ alors les E_i sont tous égaux donc $0 \notin \mathrm{Sp}({}^tBB)$ donc ${}^tBB$ puis B sont inversibles.

2. $(J_nB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{k,j} = \mathrm{Card}(E_j) = c$ et $(BJ_n)_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k}$ est le nombre de parties qui contiennent i. On suppose donc que pour chaque i, il existe exactement c parties qui contiennent i.

3. Comme $J_n^2 = nJ_n$, on a ${}^tBBJ_n = (c+(n-1)d)J_n$. On a alors $\|BJ_n\|^2 = \mathrm{Tr}({}^tJ_n\,{}^tBBJ_n) = \mathrm{Tr}(n(c+(n-1)d)J_n) = n^2(c+(n-1)d)$ et $\|BJ_n\|^2 = \|J_nB\|^2 = \sum_{i,j} (J_nB)_{i,j}^2 = \sum_{i,j} c^2 = n^2c^2$. On en déduit $n^2c^2 = n^2(c+(n-1)d))$ donc $c^2 = c + (n-1)d$.

Exercice 46 *[sujet]* $(f(x)|y) = (x|y) + k(x|a)(a|y) = (x|f(y))$ donc f est symétrique. Si $f(x) = 0$ alors $x = -k(x|a)a \in \mathrm{Vect}\{a\}$ et comme $f(a) = (1 + k\|a\|^2)a = (1+k)a \neq 0$, on a $\ker(f) = \{0\}$. Si $x \in \mathrm{Vect}\{a\}^\perp$ alors $f(x) = x$ donc $1 \in \mathrm{Sp}(f)$ est $\mathrm{Vect}\{a\}^\perp \subset E_1(f)$; de plus $f(a) = (1+k)a$ donc $1 + k \in \mathrm{Sp}(f)$. On a donc $\mathcal{X}_A = (X-1)^{n-1}(X-1-k)$, $E_{1+k}(f) = \mathrm{Vect}\{a\}$ et $E_1(f) = \mathrm{Vect}\{a\}^\perp$.

Exercice 47 *[sujet]* **1.** Facile avec $< P|P >= 0 \Rightarrow \forall k \in [\![0, n]\!]\,, P^{(k)}(\alpha) = 0$ donc α est racine de P d'ordre $\geqslant n+1$ et $\deg(P) \leqslant n$ donc $P = 0$.

2. Endomorphisme facile. $\varphi(P)^{(k)} = (X-\alpha)P^{(k+1)} + kP^{(k)}$ donc $< \varphi(P)|Q > = \sum_{k=0}^{n} kP^{(k)}(\alpha)Q^{(k)}(\alpha) = < P|\varphi(Q) >$.

Exercice 48 *[sujet]* Vérifier $(T(f)|g) = (f|T(g))$ par des IPP (en remarquant $T(f) = (uf')'$ pour aller plus vite).

Exercice 49 *[sujet]* **1.** Soit (e_i) une bon de vecteurs propres ; si $x = \sum x_i e_i$ alors $(f(x)|x) = \sum \lambda_i x_i^2$ et $\|x\|^2 = \sum x_i^2$

2. $0 = \lambda_n \|x\|^n - (f(x)|x) = \sum (\lambda_n - \lambda_i)x_i^2$ (somme de termes positifs) ; donc $x_i = 0$ si $\lambda_i \neq \lambda_n$, ce qui donne $x \in \text{Vect}\{e_i, \lambda_i = \lambda_n\} = E_{\lambda_n}(f)$

3. On raisonne par récurrence sur n : pour $n = 1$, toute base est formée de vecteurs propres. On suppose le résultat pour un endomorphisme symétrique d'un espace de dimension $n-1$; $(f(e_n)|e_n) = \lambda_n$ donne e_n vecteur propre associé à λ_n d'après la question précédente ; $H = \text{Vect}\{e_n\}^{\perp}$ est un hyperplan stable par f (donc de dimension $n-1$), l'endomorphisme g induit par f sur H est symétrique et ses valeurs propres sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ est une bon de H et vérifie $(g(e_i)|e_i) = \lambda_i$ donc par HR, les e_i sont des vecteurs propres de g, donc de f.

Exercice 50 *[sujet]* **1.** $g = \sum_{k=1}^{n} u_k - id$ est symétrique

2. On a $(g(x)|x) = 0$ pour tout x donc $\text{Sp}(g) = \{0\}$ et $g = 0$ car DZ

3. On a $x = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ donc $E = \sum_{k=1}^{n} \text{Im}(u_k)$ ce qui donne $E = \bigoplus_{k=1}^{n} \text{Im}(u_k)$ avec l'égalité des dimensions. Pour $x \in E$, on a $u_i(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k \circ u_i(x)$ donc par unicité de l'écriture dans une famille d'espaces en somme directe, on a $u_i(x) = u_i^2(x)$ (proj) et $u_k \circ u_i(x) = 0$ si $i \neq k$. Enfin $(u_i(x)|u_j(y)) = (u_j \circ u_i(x)|y) = 0$ si $i \neq j$ donc les images sont orthogonales.

Exercice 51 *[sujet]* **1.** Si $BX = \lambda X$ et $X \neq 0$ alors ${}^tXBX = \|AX\|^2 > 0$ et ${}^tXBX = \lambda\|X\|^2$; on en déduit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$

2. pour $i \geqslant 2$, on a $(BX_1|X_i) = (AX_1|AX_i) = 0$ donc $BX_1 \in \text{Vect}\{X_2, \ldots, X_n\}^{\perp} = \text{Vect}\{X_1\}$

Exercice 52 *[sujet]* Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une bon de vecteurs propres de u, on pose $e = e_1 + \cdots + e_n$ et on a $(u(e)|e) = \text{Tr}(u) = 0$; on a $E = \text{Vect}\{e\} \overset{\perp}{\oplus} H$ et H est stable par u. Si v est l'endomorphisme induit par u sur H, on a $\text{Tr}(u) = \text{Tr}(v)$ donc on applique l'HR à v et on obtient une bon de E en rajoutant $\frac{1}{\sqrt{n}}e$ à la bon de H donnée par l'HR

Exercice 53 *[sujet]* On a $\text{Tr}(S^2) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2$ et $\text{Tr}(S^2) = \text{Tr}(D^2) = \sum_{i \geqslant 1} a_{i,i}^2$; on a donc $\sum_{i \neq j} a_{i,j}^2 = 0$ puis (somme de termes positifs nulle) $S = D$

Exercice 54 *[sujet]* $\phi(P) = ((1-X^2)P')'$ donc par IPP, $(\phi(P)|Q) = -\int_{-1}^{1} (1-t^2)P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t$ puis $(\phi(P)|Q) = (\phi(Q)|P) = (P|\phi(Q)$

La matrice de ϕ dans la base canonique est triangulaire supérieure donc les vp de ϕ sont les $k(k+1)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.

Exercice 55 *[sujet]* **1.** Fait en cours.

2. $(p \circ q \circ p(x)|y) = (q \circ p(x)|p(y)) = (p(x)|q \circ p(y)) = (x|p \circ q \circ p(y))$

3. $\text{Im}(p) \subset \text{Im}(p) + \ker(q)$ donc $(\text{Im}(p) + \ker(q))^{\perp} \subset \text{Im}(p)^{\perp} = \ker(p)$; de même $(\text{Im}(p) + \ker(q))^{\perp} \subset \ker(q)^{\perp} = \text{Im}(q)$; récip, si $x \in \ker(p) \cap \text{Im}(q)$ et $p(a) + b \in \text{Im}(p) + \ker(q)$ alors $q(x) = x$ donc $(x|p(a) + b) = (p(x)|a) + (q(x)|a) = (x|q(a)) = 0$.

4. $\text{Im}(p)$ est stable par $p \circ q \circ p$ donc il existe une base (e_i) de $\text{Im}(p)$ constituée de vecteurs propres de $p \circ q \circ p$; pour de tels vecteurs, on a $p(e_i) = e_i$ donc $p \circ q(e_i) = p \circ q \circ p(e_i) = \lambda_i e_i$ donc ce sont aussi des vecteurs propres de $p \circ q$. $E = \text{Im}(p) + \ker(q) + (\ker(p) \cap \text{Im}(q))$; on complète la famille précédente par une base (f_j) de $\ker(q)$ et une base (g_k) de $\ker(p) \cap \text{Im}(q)$, on obtient une famille génératrice $\mathcal{G}$ de E qui vérifie $p \circ q(f_j) = 0$ et $p \circ q(g_k) = p(g_k) = 0$. Ainsi $\mathcal{G}$ est constituée de vecteurs propres de $p \circ q$; on en extrait une base qui reste constituée de vecteurs propres de $p \circ q$.
On vient de voir que les valeurs propres de $p \circ q$ sont 0 et des valeurs propres de $p \circ q \circ p$; on vérifie que $0 \leqslant (q(x)|x) \leqslant \|x\|$ (car $\text{Sp}(q) \in \{0, 1\}$, avec une bon de vecteurs propres) puis $(p \circ q \circ p(x)|x) = (q \circ p(x)|p(x))$ donc $0 \leqslant (p \circ q \circ p(x)|x) \leqslant \|p(x)\| \leqslant \|x\|$ (Bessel) donc $\text{Sp}(p \circ q \circ p) \subset [0, 1]$.

Exercice 56 *[sujet]* **1.** Si $A = PD\,{}^tP$ avec $D = \text{diag}(\lambda_i)$ alors $A + rI_n = P(D + rI_n)\,{}^tP$ donc les vp de $A + rI_n$ sont les $\lambda_i + r > 0$

2. De même, on trouve que $B = P(D - rI_n)(D + rI_n)^{-1}\,{}^tP$ est symétrique et les vp de B sont $\dfrac{\lambda_i - r}{\lambda_i + r} \in]-1,1[$

Exercice 57 *[sujet]* **1.** on remarque $N = {}^tMM$ donc $(NX|X) = ({}^tMMX|X) = (MX|MX)$

2. $N^p = (M^p)^{p+1} = {}^tM^{p+1} = {}^tN = N$ car $N = {}^tMM$ est symétrique. On a $\mathrm{Sp}(N) \subset \{-1, 0, 1\}$ (-1 selon la parité de n) car N est symétrique réelle donc ses vp sont réelles

3. $\mathrm{Sp}(N) \subset \mathbb{R}^+$ d'après **a** donc $\mathrm{Sp}(N) \subset \{0, 1\}$ et N est DZ (symétrique réelle) donc $X(X-1)$ annule N.

4. $\ker(M) \overset{\text{cours}}{=} \ker({}^tMM) = \ker(N)$ et $\mathrm{Im}(N) = \mathrm{Im}(M^{p+1}) \subset \mathrm{Im}(M)$, égalité par dimensions

Exercice 58 *[sujet]* **1.** Si U et V non inversibles alors $\det(U) = \det(V) = 0$, $(UX|X) \geqslant 0$ et $(VX|X) \geqslant 0$ donc $((U+V)X|X) \geqslant 0$, ie $\mathrm{Sp}(U+V) \in \mathbb{R}^+$ et $\det(U+V) \geqslant 0 = \det(U) + \det(V)$.

2. Si λ_i sont les vp de U alors $\det(U + I_n) = \prod(1 + \lambda_i) \geqslant 1 + \prod \lambda_i = 1 + \det(U)$.

3. Si V est symétrique réelle, on peut écrire $V = M^2$ avec M symétrique ; si V est inversible alors M aussi puis $\det(U+V) = \det(M)\det(I_n + M^{-1}UM^{-1})\det(M)$ et on vérifie que l'on peut appliquer le cas précédent à $U' = M^{-1}UM^{-1}$: U' est symétrique et ${}^tXU'X = {}^t(M^{-1}X)U(M^{-1}X) \geqslant 0$ (car $\mathrm{Sp}(U) \subset \mathbb{R}^+$) donc $\mathrm{Sp}(U') \subset \mathbb{R}^+$.

Exercice 59 *[sujet]* **1.** fait en cours

2. On écrit, si U inversible, $U = S^2$ avec S symétrique réelle inversible puis $UV = S^{-1}(SVS)S$ donc $\mathrm{Sp}(UV) = \mathrm{Sp}(SVS)$ et comme $(SVSX|X) = (V(SX)|SX) \geqslant 0$, on a $\mathrm{Sp}(SVS) \subset \mathbb{R}^+$.

Exercice 60 *[sujet]* **1.** Fait en cours

2. $AB = R^{-1}(RAR)R$ est semblable à RAR qui est symétrique réelle

3. $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(RAR)$ et $(RARX|X) = (AY|Y) \geqslant 0$ (avec $Y = RX$) car $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ (cf cours) ; on en déduit $\mathrm{Sp}(RAR) \in \mathbb{R}^+$ (cf cours)

Exercice 61 *[sujet]* **1.** $\mathrm{Tr}(AA^T) = \|A^T\|^2 > 0$ si $A \neq 0$

2. $S = PDP^T = P\Delta^2P^T$ (avec $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$) et prendre $A = \Delta P^T$ qui est inversible car $\lambda_i > 0$ et P inversible.

3. $\mathrm{Tr}(SS') = \mathrm{Tr}(A^TAS') = \mathrm{Tr}(AS'A^T) > 0$ car $AS'A^T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car $(AS'A^TX|X) = (S'A^TX|A^TX) > 0$ si $X \neq 0$ car A^T est inversible. (on a même $\mathrm{Sp}(SS') \subset \mathbb{R}^{+*}$)

Exercice 62 *[sujet]* Si ϕ existe et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ alors ${}^tXMX = \phi(y, y)$ avec $y = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_ie_i$.

Réciproquement, si $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^{+*}$, on a $m_{i,j} = (Me_j|e_i)$ et on vérifie que $\phi(x, y) = (Mx|y)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 63 *[sujet]* **1.** Si A est la matrice de f dans la base (e_i) alors $a_{i,j} = (e_i|f(e_j))$.

2. Si (e_i) est une bon de vecteurs propres de f et λ_i les vp de f alors $\mathrm{Tr}(g \circ f) = \sum \lambda_i(g(e_i)|e_i) \geqslant 0$ car $\lambda_i \geqslant 0$ et $g(x)|x) \geqslant 0$ pour tout x

Exercice 64 *[sujet]* **1.** $(AX|X) = (X|{}^tAX) = -(X|AX)$

2. Si $(A+B)X = 0$ alors $0 = ((A+B)X|X) = (BX|X) > 0$ si $X \neq 0$ donc $\ker(A+B) = \{0\}$.

Exercice 65 *[sujet]* **1.** p et q sont symétriques donc u est symétrique donc DZ

2. $\mathrm{Sp}(p) = \{0, 1\}$ donc $0 \leqslant (p(x)|x) \leqslant \|x\|^2$, ce qui donne $0 \leqslant (u(x)|x) \leqslant 2\|x\|^2$ donc $\mathrm{Sp}(u) \subset [0, 2]$. Si $u(x) = 0$ alors $(p(x)|x) = (q(x)|x) = 0$, ce qui donne $p(x) = q(x) = 0$ (prendre une bon de vecteurs propres de p), on a donc $\ker(u) \subset \ker(p) \cap \ker(q)$, réciproque évidente. On trouve de même $\ker(u - 2id) = \ker(p - id) \cap \ker(q - id)$

Exercice 66 *[sujet]* **1.** Facile en DZ f dans une bon (le signe des vp ne sert à rien pour la première partie) ; puis fait en cours

2. Si $(f+g)(x) = 0$ alors $(f(x)|x) + (g(x)|x) = 0$ et comme les deux termes sont $\geqslant 0$, on a $(f(x)|x) = (g(x)|x) = 0$, ce qui donne $f(x) = g(x) = 0$ (avec une bon de vecteurs propres de chaque endomorphisme) ; on a donc $\ker(f+g) \subset \ker(f) \cap \ker(g)$ (récip évidente). On en déduit $\mathrm{Im}(f+g) = \ker(f+g)^\perp = \ker(f) \perp + \ker(g)^\perp = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 67 *[sujet]* **1.** $(f(x)|y) = \sum(e_k|x)(e_k|y) = (f(y)|x) = (x|f(y))$ puis $(f(x)|x) = \sum(e_k|x)^2 > 0$ si $x \neq 0$.

2. f^{-1} est lui aussi symétrique défini positif donc cf cours

Exercice 68 *[sujet]* $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = (A|B) \overset{\text{C−Sch}}{\leqslant} \|A\|\|B\|$ puis $\|A\| = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^2)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2}$ (DZ A) $(\mathrm{Tr}(A))^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ (à vérifier par récurrence sur n avec les $\lambda_i \geqslant 0$)

Exercice 69 *[sujet]* $A = PD\,{}^tP$ donc $|\,\mathrm{Tr}(AU)| = |\,\mathrm{Tr}(D\,{}^tPUP)| = |\,\mathrm{Tr}(DQ)|$ avec $Q = {}^tPUP$ orthogonale. On en déduit $|\,\mathrm{Tr}(AU)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_{i,i}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{Tr}(D) = \mathrm{Tr}(A)$ car $\lambda_i \geqslant 0$ et comme Q est orthogonale, $\sum_{i=1}^{n} q_{i,j}^2 = 1$, ce qui donne $|q_{i,i}| \leqslant 1$.

Exercice 70 *[sujet]* **1.** $\mathrm{Tr}(AB) = (A|B) \leqslant \|A\|.\|B\|$ et $\|A\|^2 = \mathrm{Tr}(A^2) = \sum \lambda_i^2 \leqslant \left(\sum \lambda_i\right)^2 = \mathrm{Tr}(A)^2$ car $\lambda_i \geqslant 0$

2. norme cf cours ; $\|MN\|^2 = \mathrm{Tr}({}^N\,{}^tMMN) = \mathrm{Tr}({}^tMMN\,{}^tN) \leqslant \mathrm{Tr}({}^tMM)\,\mathrm{Tr}(N\,{}^tN) = \|M\|^2\|N\|^2$.

Exercice 71 *[sujet]* Si la décomposition existe alors ${}^tAA = S^2$; on vérifie donc que ${}^tAA$ est symétrique définie positive (car $({}^tAAX|X) = \|AX\|^2 > 0$ si $X \neq 0$ car A est inversible), il existe donc S symétrique définie positive telle que ${}^tAA = S^2$ (cf cours) ; on pose alors $O = AS^{-1}$ et on vérifie ${}^tOO = S^{-1}\,{}^tAAS^{-1} = I_n$ donc O est bien orthogonale

Exercice 72 *[sujet]* **1.** On décompose $X = \sum x_ie_i$ dans (e_i) une bon de vecteurs propres de A et on a ${}^tXX = \sum x_i^2$ et ${}^tXAX = \sum \lambda_i x_i^2$.

2. On pose $M = tA+(1-t)B$ qui est symétrique ; on a ${}^tXMX \geqslant \mu\,{}^tXX$ avec $\mu = t\min\mathrm{Sp}(A)+(1-t)\min\mathrm{Sp}(B) \in I$ et $\min\mathrm{Sp}(M) \geqslant \mu$ donc $\min\mathrm{Sp}(M) \in I$; on fait de même avec $\max\mathrm{Sp}(M)$

Exercice 73 *[sujet]* On pose $x = \sum x_ie_i$ avec (e_i) bon de vecteurs propres de ϕ et on a $\phi(x) = \sum \lambda_ix_ie_i$ donc $\|\phi(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_ix_i)^2$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2 = 1$; on en déduit $\max_{\|x\|=1} \|\phi(x)\| = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(\phi)} |\lambda|$ (atteint pour le vecteur de la base associé). De même, on a $| < \phi(x), x > | = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_ix_i^2\right|$ donc $\max | < \phi(x), x > | = |\max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(\phi)} |\lambda|$ aussi

Exercice 74 *[sujet]* **1.** Si f contraction et e un vecteur propre alors $|\lambda|\,\|x\| = \|f(x)\| \leqslant \|x\|$ et $x \neq 0$ donc $|\lambda| \leqslant 1$. Réciproquement, on diagonalise f dans une bon, $x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$ puis $\|f(x)\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_ie_i\right\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2x_i^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = \|x\|$

2. Il suffit de diagonaliser f et de remarquer que les vp de $P(f)$ sont les $P(\lambda_i)$

3. Début fait en cours. Comme $\|MX\|^2 = {}^t(MX)(MX) = {}^tXS^2X = \|SX\|^2$ donc M est une contraction si et seulement si S est une contraction donc si et seulement si $\mathrm{Sp}(S) \in [-1, 1]$ donc si et seulement si $\mathrm{Sp}({}^tMM) \in [0, 1]$ (les vp de ${}^tMM$ sont déjà positives)

Exercice 75 *[sujet]* $P = X(X^2 + 4X + 5)$ n'admet que 0 comme racine réelle ; A est symétrique réelle donc DZ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on en déduit $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ puis $A = 0$ (semblable à la matrice nulle)

Exercice 76 *[sujet]* **1.** $P = X^4 - X = X(X-1)(X^2 + X + 1)$ annule A

2. Si $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ alors $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1\}$ car A étant réelle, on ne peut pas avoir j ou j^2 vp seule et $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ donnerait $A = 0$ car A est DZ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ (car P est SARS) ; on ne déduit que $X(X-1)$ annule A (car DZ) donc $A^2 = A$, ce qui donne $A = {}^tA$ donc A est symétrique réelle avec $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1\}$

Exercice 77 *[sujet]* A est DZ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbf{U}_k$ (racines $k^{\text{ème}}$ de l'unité) donc les deux seules vp possibles de A sont ±1 et $(X+1)(X-1)$ annule donc A (car DZ)

Exercice 78 *[sujet]* **1.** cours

2. si $B = {}^tMM$ alors (par commutativité) $B^2 = {}^tM^2M^2 = 16I_2$ donc $(X-4)(X+4)$ annule B ; avec la question précédente, on en déduit $\mathrm{Sp}(B) = \{4\}$ et comme B est DZ, on a $B = 4I_2$

3. On a donc $M = 2R(\theta)$ (car $(2S(\theta))^2 = 4I_2$) et en remplaçant on trouve deux solutions : $M = 2R(\pm\pi/2)$

Exercice 79 *[sujet]* **1.** $I_n - M = {}^tM^2 = (I_n - M^2)^2$ donc $P = X(X-1)(X^2 + X - 1)$ annule M

2. $\det(M - I_n) = \det({}^tM - I_n) = \det(-M^2) \neq 0$ car M est inversible.

3. On a $M(M-I_n)(M^2+M-I_n)=0$ donc en simplifiant par M et $M-I_n$ inversible, on a $M^2+M=I_n$. On en déduit (avec l'équation initiale) $M={t^M}$ donc M est symétrique réelle, $\mathrm{Sp}(M)\subset\{\lambda_1,\lambda_2\}$ avec $\lambda_i=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.
On vérifie alors que les solutions sont toutes les matrices orthogonalement semblables à $\begin{pmatrix}\lambda_1 I_p & 0\\ 0 & \lambda_2 I_{n-p}\end{pmatrix}$

Exercice 80 *[sujet]* **1.** Comme $\det(M)=\det({}^tM)$, on a $\det(M)^5=1$ donc $\det(M)=1$ (réelle)

2. $M^{-1}=\left({}^tMM\right)^{-2}$ est symétrique donc M aussi

3. Reste $M^5=I_n$, M est DZ par th spec et $\mathrm{Sp}(M)\subset\{1\}$ (pas de vp complexe) donc $M=I_n$

Exercice 81 *[sujet]* $A=PD\,{}^tP$ donc $B=P(D^3+D+I_n)\,{}^tP$; il suffit donc de trouver un polynôme Q tel que $\lambda=Q(\lambda^3+\lambda+1)$ pour les vp de A. Un tel polynôme existe par interpolation de Lagrange : introduire les vp distinctes et vérifier que $x\mapsto x^3+x+1$ est strictement croissante donc bijectives (donc si les $\lambda_i^3+\lambda_i+1$ sont distinctes alors les λ_i aussi)

Exercice 82 *[sujet]* Si $X\in E_\lambda(A)$ ($X\neq 0$) alors $A^{2p+1}X=\lambda^{2p+1}X$ donc $0=(B^{2p}+\lambda B^{2p-1}+\cdots+\lambda^{2p}I_n)(B-\lambda I_n)X$; on en déduit $BX=\lambda X$: si $\lambda\neq 0$, la matrice $(B^{2p}+\lambda B^{2p-1}+\cdots+\lambda^{2p}I_n)$ est inversible car $\mathrm{Sp}(B)\in\mathbb{R}$ et la seule racine réelle de $X^{2p+1}-\lambda^{2p+1}$ est λ ; si $\lambda=0$ alors $X\in\ker(B^{2p+1})=\ker(B)$ car B est DZ. On a donc $E_\lambda(A)=E_\lambda(B)$ (l'inclusion inverse se fait de même) ; A et B sont donc DZ dans la même base et comme $x\mapsto x^{2p+1}$ est injective, on en déduit $A=B$ (en prenant des matrices diagonales semblables à A et B)
Bien sûr que non : si $A=-B$, on a aussi $A^2=B^2$; on peut encore prouver que A et B sont codiagonalisables dans une bon, $A=P\mathrm{diag}(\lambda_i)\,{}^tP$ et $B=P\mathrm{diag}(\pm\lambda_i)\,{}^tP$.

Exercice 83 *[sujet]* A^2 est symétrique et ses vp sont les carrés des vp de A donc les vp de A^2 sont réelles ; de plus $(A^2X|X)=-\|AX\|^2\leqslant 0$ donc les vp de A sont des complexes dont les carrés sont dans $\mathbb{R}^-$ donc des imaginaires purs.
Comme A est réelle, on regroupe les vp de A avec leurs conjuguées et on a $\det(A)=0^{m_0(A)}\times\displaystyle\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\setminus\{0\}}|\lambda|^{m_\lambda(A)}\in\mathbb{R}^+$.

Exercice 84 *[sujet]* **1.** On aurait $(A^2X|X)=\lambda\|X\|^2$ et $(A^2X|X)=-\|AX\|^2$ donc $\|AX\|=0$ pour tout X et $A=0$ ce qui est absurde

2. Si $\lambda=0$, $A=0$ convient et si $\lambda<0$, on a $\det(A)^2=\lambda^n$ donc n est pair. Si on pose $\lambda=-\mu^2$ et A la matrice diagonale par blocs de blocs diagonaux $\begin{pmatrix}0 & -\mu\\ \mu & 0\end{pmatrix}$, on vérifie que $A^2=\lambda I_n$.

3. n est pair, $n=2p$ et on raisonne par récurrence sur p (évident pour $p=1$) : si une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_{2p-2}(\mathbb{R})$ telle que $A^2=\lambda I_{2p-2}$ est orthogonalement semblable à une telle matrice et si $A\in\mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$ est antisymétrique et vérifie $A^2=\lambda I_n$, on choisit X un vecteur unitaire et on a $(AX|X)=(X|\,{}^tAX)=-(X|AX))$; comme A est inversible ($\lambda\neq 0$), $AX\neq 0$ donc (X,AX) est une base de P plan stable par A. Si on norme le vecteur AX, on obtient une bon de P dans laquelle la matrice de l'endomorphisme associé à A est $\begin{pmatrix}0 & -\mu\\ \mu & 0\end{pmatrix}$. Reste à vérifier que $P^\perp$ est stable et appliquer l'HR à l'endomorphisme induit sur $P^\perp$.

Exercice 85 *[sujet]* **1.** Fait en cours

2. U^2 est symétrique réelle donc DZ ; soit $P=\displaystyle\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(U^2)}(X-\lambda)$, P est SARS et annule U^2 (car DZ). $Q=P(X^2)$ est annulateur de U, scindé dans $\mathbb{C}$ (poser μ tel que $\mu^2=\lambda$) et SARS si $\notin\mathrm{Sp}(U)$. Reste le cas où $0\in\mathrm{Sp}(U)$, 0 est alors racine double de $Q=X^2R(X)$; on a $U^2R(U)=0$ donc $\mathrm{Im}(R(U))\subset\ker(U^2)=\ker(U)$ d'après la première question donc $\mathrm{Im}(R(U))\subset\ker(U)$, ce qui donne $UR(U)=0$ donc $XR(X)$ est aussi annulateur de U et SARS

Exercice 86 *[sujet]* **1.** Fait en cours (evn)

2. $\|AX\|_2^2=(AX|AX)=({}^tAAX|X)=\sum\lambda_i x_i^2$ si $X=\sum x_ie_i$ avec (e_i) bon de vecteurs propres de ${}^tAA$ (symétrique réelle), on a donc $\|AX\|_2^2\leqslant\max(\lambda_i)\sum x_i^2=\max(\lambda_i)\|X\|_2^2$. On a donc $N(A)\leqslant\max(\lambda_i)$ et on obtient l'égalité avec un vecteur propre unitaire associé à la vp $\max(\lambda_i)$