Correction TD15 : Intégrales à paramètres

Exercice 5 **(Centrale PSI 2019)**

1. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) \mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

3. En déduire la valeur de f ; on donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
indication : trouver une équation différentielle vérifiée par f.

---

1. Avec $g(x,t) = \exp\left(-t^2 - \dfrac{x^2}{t^2}\right)$, on a

H1 : pour $t > 0$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$
H2 : pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$
H3 : pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $|g(x,t)| \leqslant e^{-t^2} = \varphi(t)$ (indépendante de x) et φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ (et paire)}}$

2. Cette fois :

H1 : pour $t > 0$, $x \mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
H2 : pour $x > 0$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$
H3 : pour $x > 0$, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{2x}{t^2} g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$
H4 : pour $t > 0$ et $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, on a $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{2x}{t^2} g(x,t) \leqslant \dfrac{2b}{t^2} \exp\left(-t^2 - \dfrac{a^2}{t^2}\right) = \psi(t)$ (indépendante de x) et ψ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\displaystyle\lim_{t \to 0} \psi(t) = 0$ (car $\dfrac{1}{t^2} e^{-1/t^2} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$)

On en déduit $\boxed{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*}) \text{ et } f'(x) = -2x \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} g(x,t) \,\mathrm{d}t \text{ pour } x > 0}$

3. On pose $u = \dfrac{x}{t}$: la fonction $u \mapsto \dfrac{x}{u}$ est $\mathcal{C}^1$ bijective et strictement décroissante (car $x > 0$) de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$; $\mathrm{d}t = -\dfrac{x}{u^2} \,\mathrm{d}u$ et $f'(x) = -2x \displaystyle\int_{+\infty}^0 \frac{x^2}{u^2} \exp\left(-\frac{x^2}{u^2} - u^2\right) \left(\frac{-x}{u^2}\right) \mathrm{d}u = -2f(x)$.

On en déduit $f(x) = \alpha e^{-2x}$ pour $x > 0$. Par continuité de f en 0, on a $\alpha = f(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ puis comme f est paire,

$\boxed{f(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|x|} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$