TD17 : Isométries vectorielles

Exercice 1 **(CCP PSI 2016)**
Soit $a \in E$ non nul, E espace euclidien. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquels $u : x \mapsto \alpha < x|a > a - x$ est une isométrie. Reconnaître u pour ces valeurs.

Exercice 2 **(CCP PSI 2016)**

Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 3
Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation autour de $u = (1, 2, 2)$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice 4 **(ENTPE-EIVP PSI 2013)**
Trouver a, b, c, d tels que $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & a \\ -2 & 6 & b \\ 3 & c & d \end{pmatrix}$ soit une matrice de rotation ; préciser ses éléments géométriques.
indication : trouver c en utilisant une propriété des colonnes des matrices orthogonale ; la troisème colonne est imposée par les deux première pour une rotation.

Exercice 5 **(ENSAM PSI 2015)**

Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{i,j} m_{i,j}\right| \leqslant n \leqslant \displaystyle\sum_{i,j} |m_{i,j}| \leqslant n^{3/2}$.
indication : calculer $(Me_i|e_j)$ pour (e_i) la base canonique de $\mathbb{R}^n$; penser à Cauchy-Schwarz

Exercice 6 **(ENSAM PSI 2018)**

1. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, E espace euclidien, vérifiant $\forall x \in E, (f(x)|x) = 0$, montrer que $f - id$ et $f + id$ sont bijectifs.
indication : étudier leurs noyaux.

2. Montrer que $g = (id + f) \circ (id - f)^{-1}$ est une isométrie vectorielle qui n'admet pas -1 pour valeur propre.
indication : poser $x = y - f(y)$ et exprimer toutes les quantités en fonction de y.

3. Étudier la réciproque : si g est une isométrie vectorielle qui n'admet pas -1 pour valeur propre, existe-t-il f tel que $\forall x \in E, (f(x)|x) = 0$ et $g = (id + f) \circ (id - f)^{-1}$?
indication :

a) pour l'existence de f, on peut calculer f en fonction de g.

b) pour vérifier $(f(x)|x) = 0$, montrer que si u et v commutent et u inversible alors u^{-1} et v commutent aussi.

Exercice 7 **(CCINP PSI 2021)**
Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\dfrac{1}{3}(2M + I_n) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $(Mx|x) = \|x\|^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Que peut-on en déduire pour M ?
indication : montrer que $M + M^T = 2I_n$ puis qu'il existe A antisymétrique telle que $M = I_n + A$, puis $A^2 = 0$ et enfin $A = 0$.

Exercice 8 **(Mines-Ponts PC 2011)**

1. Montrer que toute matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $P = \Omega T$, où Ω est réelle orthogonale et T triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs (on pourra s'inspirer du procédé d'orthonormalisation de Schmidt).

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $(\det A)^2 \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j})^2\right)$.
indication : si A est inversible, relier $\det(A)$ et $\det(T)$ puis introduire les coefficients de la matrice Ω^{-1}