I Séries entières

1. Convergence d'une série entière

a) Rayon de convergence : lemme d'Abel, définition du rayon de convergence ($\sup\{\rho > 0 | (a_n\rho^n)$ est bornée$\}$), absolue convergence à l'intérieur du disque ouvert de convergence, divergence « grossière » à l'extérieur du disque fermé. $R\left(\sum a_n z^n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ (si cette limite existe dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$) et $R\left(\sum n^\alpha z^n\right) = 1$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ sont utilisables directement

b) Opérations sur les séries entières : si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$ et si $a_n = O(b_n)$, $R_b \leqslant R_a$; somme et produit de Cauchy. Égalité des rayons de convergence de $\sum a_n z^n$, $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ et $\sum a_{n-1}\dfrac{z^n}{n}$.

2. Somme d'une série entière

a) Continuité de la somme : convergence normale sur tout segment de $]-R,R[$ dans le cas réel, continuité de la somme sur $]-R,R[$. Continuité sur le disque ouvert de rayon R dans le cas complexe (*admis*).

b) Dérivation et intégration des séries entières de variable réelle : intégration terme à terme de la somme d'une série entière sur tout segment inclus dans le disque ouvert de convergence, classe $\mathcal{C}^\infty$ de la somme sur le disque ouvert de convergence.

3. Fonction développable en série entière

a) Série de Taylor : définition d'une fonction DSE (au voisinage de 0), série de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$. Une fonction est DSE sur $]-r,r[$ si et seulement si elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ et pour tout $x \in]-r,r[$, le reste $R_n(x)$ de Taylor tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

b) Fonctions usuelles : DSE en 0 de e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ (*Taylor*), $\dfrac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\arctan x$ (*intégration*) et $(1+x)^\alpha$ (*en utilisant une équation différentielle*).

II Endomorphismes d'un espace euclidien

1. Isométries vectorielles (*plutôt qu'endomorphisme orthogonal*)

a) Groupe orthogonal, conservation de la norme, du produit scalaire et image d'une base orthonormale ; F est stable par $u \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si $F^\perp$ est stable par u.

b) Matrices orthogonales, spéciales orthogonales, matrice de passage d'une base orthonormale à une autre base orthonormale.

2. Espaces euclidiens de dimension 2 et 3

a) Orientation de l'espace, produit mixte et produit vectoriel dans un espace de dimension 3 orienté.

b) Isométries du plan

c) Isométries d'un espace de dimension 3, rotations.

À suivre : l'étude des matrices symétriques