# Variables aléatoires discrètes

Dans tout ce chapitre, $\mathscr{A}$ désignera une tribu sur un ensemble $\Omega$.

## I Généralités

### 1. Définitions

**<u>Définition</u> :** Soit $E$ un ensemble quelconque. Une **variable aléatoire discrète sur** $(\Omega, \mathscr{A})$ est une <u>application</u> $X : \Omega \longrightarrow E$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :

**1.** L'ensemble image $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.

**2.** Pour tout $x$ de $X(\Omega)$, l'image réciproque de $\{x\}$ (ie l'ensemble des antécédents de $x$) est un événement (ie appartient à $\mathscr{A}$) :

$$\forall x \in X(\Omega), X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} \in \mathscr{A}$$

Une **variable aléatoire discrète réelle sur** $(\Omega, \mathscr{A})$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$ à valeurs réelles (ie $E = \mathbb{R}$).

<u>Remarque(s) :</u>

(I.1) Si $F \subset X(\Omega)$, $F$ est au plus dénombrable donc $F = \{x_n, n \in I\}$ avec $I \subset \mathbb{N}$ et $X^{-1}(F) = \bigcup_{n \in I} X^{-1}(\{x_n\})$ est une réunion, au plus dénombrable, d'événements donc $X^{-1}(F) \in \mathscr{A}$.

(I.2) Si $x \in E \setminus X(\Omega)$ alors $X^{-1}(\{x\}) = \emptyset$ donc $X^{-1}(\{x\}) \in \mathscr{A}$ aussi.

<u>Exemple(s) :</u>

(I.3) Si on tire successivement, avec remise, $n$ boules dans une urne contenant $p$ boules blanches et $q$ boules noires, le nombre de boules blanches tirées est une variable aléatoire discrète .

(I.4) Si on lance indéfiniment un dé à 6 faces et si on note $X_n$ la valeur du dé au $n^{\text{ème}}$ lancer alors $X_n$ est une variable aléatoire discrète .
Si on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^*, X_n = 6\}$ (avec $T = +\infty$ si l'ensemble est vide), $T$ est une variable aléatoire discrète (le temps d'attente du premier 6).

**<u>Notations</u> :** Soit $X$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

**1.** Si $U \subset X(\Omega)$, l'événement $X^{-1}(U)$ est noté $(X \in U)$ ou $\{X \in U\}$ :

$$(X \in U) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in U\}$$

**2.** Si $x \in X(\Omega)$, l'événement $(X \in \{x\})$ est noté plus simplement $(X = x)$ :

$$(X = x) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$$

**3.** Si $X$ est à valeurs réelles et $a \in \mathbb{R}$, on utilise les notations suivantes :

$$(X \leqslant a) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant a\} \quad \text{et} \quad (X \geqslant a) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \geqslant a\}$$

$$(X < a) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < a\} \quad \text{et} \quad (X > a) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) > a\}$$

Remarque(s) :

(I.5) Ces notations sont « compatibles » avec les opérations sur les ensembles : $\left(X \in \overline{A}\right) = \overline{(X \in A)}$, $(X \in A) \cup (X \in B) = (X \in A \cup B)$ et $(X \in A) \cap (X \in B) = (X \in A \cap B)$.

(I.6) Si $U \in X(\Omega)$ alors $(X \in U) = \displaystyle\bigcup_{x \in U} (X = x)$.

**Définition** [**I.1**] **:** Soient $X$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$ et $f$ une application définie sur $X(\Omega)$ (au moins). On note $f(X)$ la variable aléatoire discrète $f \circ X$, l'image de $X$ par l'application $f$.

### 2. Loi d'une variable aléatoire discrète

**Définition :** Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et $X$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On appelle **loi de la variable aléatoire discrète** $X$ l'application notée $P_X$ définie par

$$P_X \ : \ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ U & \longmapsto & P(X \in U) \end{array}$$

Remarque(s) :

(I.7) Si $U \in X(\Omega)$, on a $P_X(U) = P(X \in U) = \displaystyle\sum_{n \text{ tq } x_n \in U} p_n$.

(I.8) Cela signifie que $P_X$, la loi de $X$ est entièrement déterminée par les valeurs de $P(X = x)$ quand $x$ décrit $X(\Omega)$.

(I.9) On peut avoir deux variables aléatoires discrètes différentes $X$ et $Y$ telles que $P_X = P_Y$ (donc qui aient la même loi) : on lance deux dés à 6 faces discernables et on note $X$ la différence de la valeur du premier dé et de la valeur du second dé. Les lois de $X$ et $-X$ sont égales alors que $X \neq -X$.

Exemple(s) :

(I.10) On tire, avec remise, $p$ jetons dans une urne qui contient $n$ jetons numérotés de 1 à $n$ et on considère $X$ la variable aléatoire discrète égale au plus grand des numéros obtenus. Déterminer $P(X \leqslant k)$ et en déduire $P(X = k)$.

**Définition :** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On dit que $X$ et $Y$ **suivent la même loi** si $P_X = P_Y$, ie

$$X(\Omega) = Y(\Omega) \quad \text{et} \quad \forall z \in X(\Omega), P(X = z) = P(Y = z)$$

On le note alors $X \sim Y$.

**Propriété** [**I.2**] **:** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et $f$ une application définie sur $X(\Omega)$.

$$\text{Si } X \sim Y \text{ alors } f(X) \sim f(Y)$$

# II Couple de variables aléatoires discrètes

### 1. Loi conjointe et lois marginales

**Définition** [**II.1**] **:** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ à valeurs dans $E$ et $F$ respectivement. On appelle **couple de variables aléatoires discrètes** $(X, Y)$ la variable aléatoire discrète $Z$, à valeurs dans $E \times F$, définie par

$$\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$$

Exemple(s) :

(II.1) On dispose de deux dés, un bleu et un vert ; on choisit un dé au hasard et on le lance. Si $C$ est la variable aléatoire discrète donnant la couleur du dé choisi et $V$ la valeur obtenue sur le dé alors le couple de variables aléatoires discrètes $Z = (C, V)$ détermine complètement le résultat de l'expérience.

**Définition :** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On appelle **loi conjointe de $X$ et $Y$** la loi du couple $(X, Y)$ :

$$P_{(X,Y)}(U, V) = P(X \in U, Y \in V) \text{ pour } (U, V) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$$

La loi $P_{(X,Y)}$ est entièrement déterminée par la donnée de $P(X = x_i, Y = y_j)$ pour $(x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Exemple(s) :

(II.2) On considère une urne contenant $n$ jetons numérotées de 1 à $n$. On tire successivement deux boules sans remise. On note $X_1$ la valeur du premier jeton tiré et $X_2$ celui du second. On a $P(X_1 = i, X_2 = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \dfrac{1}{n(n-1)} & \text{si } i \neq j \end{cases}$
On peut visualiser la loi du couple $(X_1, X_2)$ par une matrice $(P(X_1 = i, X_2 = j))_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \dfrac{1}{n(n-1)}(1 - \delta_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

Remarque(s) :

(II.3) On note indifféremment $(X \in A, Y \in B) = (X \in A) \cap (Y \in B)$ l'événement $(X, Y) \in A \times B$.

(II.4) Si $Z = (X, Y)$, on a $Z(\Omega) \subset X(\Omega)\times Y(\Omega)$ donc on peut vérifier que $\displaystyle\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} P(X = x, Y = y) = 1$.

**Définition [II.2] :** Soit $Z$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ à valeurs dans $E \times F$. Pour $\omega \in \Omega$, on note $Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$. Les applications $X$ et $Y$ sont alors deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On appelle **lois marginales de** $Z$ les lois des variables aléatoires discrètes $X$ et $Y$.

**Propriété [II.3] :** Soit $Z$ une variable aléatoire discrète sur $E \times F$. Les loi marginales de $Z$ sont entièrement déterminées pas la loi de $Z$ : si $Z = (X, Y)$ alors

$$\begin{cases} \forall x \in X(\Omega), P(X = x) = \displaystyle\sum_{y\in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) \\ \forall y \in Y(\Omega), P(Y = y) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} P(X = x, Y = y) \end{cases}$$

Remarque(s) :

(II.5) Si $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$ et si la loi de $Z = (X, Y)$ est visualisée par le tableau $(P(X = x_i, Y = y_j))_{(i,j)\in I\times J}$ alors $P(X = x_i) = \displaystyle\sum_{j\in J} P(X = x_i, Y = y_j)$ (somme de la $i^{\text{ème}}$ ligne) et $P(Y = y_j) = \displaystyle\sum_{i\in I} P(X = x_i, Y = y_j)$ (somme de la $j^{\text{ème}}$ colonne).

(II.6) On ne peut pas retrouver la loi de $Z$ à partir des ses lois marginales : deux variables aléatoires discrètes sur $E \times F$ différentes peuvent avoir les mêmes lois marginales ; ex : on lance une pièce équilibrée et on pose $X = 1$ si le tirage donne pile, 0 sinon ; les lois marginales de $(X, X)$ et de $(X, 1 - X)$ sont égales mais les lois conjointes sont différentes.

(II.7) Cette propriété se généralise à un $n$-uplets de variables aléatoires discrètes : si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ alors, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et tout $x_k \in X_k(\Omega)$, on a

$$P(X_k = x_k) = \sum_{\substack{x_i \in X_i(\Omega) \\ i \neq k}} P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k, \dots, X_n = x_n)$$

Exemple(s) :

(II.8) Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$, on tire successivement avec remise deux boules. On note $X$ le plus petit des deux numéros, $Y$ le plus grand. Déterminer la loi de $(X, Y)$ puis celles de $X$ et $Y$.

## 2. Conditionnement et indépendance

**Définition :** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X = x) > 0$. On appelle **loi conditionnelle de $Y$ sachant que** $(X = x)$ la loi de la variable aléatoire discrète $Y$ pour la probabilité $P_{(X=x)}$, ie

$$\forall B \in Y(\Omega), P(Y \in B |\, X = x) = \frac{P((X = x) \cap (Y \in B))}{P(X = x)}$$

Remarque(s) :

(II.9) On peut, dans le cas où $P(X = x) = 0$, poser $P(Y \in B | X = x) = 0$.

(II.10) La loi de $Y$ sachant que $(X = x)$ est entièrement déterminée par les valeurs de $P(Y = y |\, X = x)$ pour tout $y \in Y(\Omega)$ : si $B \subset Y(\Omega)$ alors $P(Y \in B |\, X = x) = \sum_{y \in B} P(Y = y |\, X = x)$.

(II.11) La loi de $Z = (X, Y)$ est entièrement déterminée par la connaissance des lois de $X$ et de $Y$ sachant $(X = x)$, pour tout $x \in X(\Omega)$ : si $(x, y) \in Z(\Omega)$, $P(Z = (x, y)) = P(Y = y | X = x) \times P(X = x)$ (même si $P(X = x) = 0$ avec la convention précédente).
La loi de $Y$ est elle aussi connue : $P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(Y = y |\, X = x) \times P(X = x)$.

(II.12) On peut définir de même la loi de $Y$ sachant que $X \in A$, avec $A \subset X(\Omega)$ tel que $P(X \in A) > 0$, en posant $P(Y \in B |\, X \in A) = P_{X \in A}(Y \in B)$.

Exemple(s) :

(II.13) On dispose d'une infinité de boites $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, la boite $B_n$ contenant $2^n$ boules dont une seule est blanche. On lance une pièce équilibrée une infinité de fois, si on obtient le premier pile au $n^{\text{ème}}$ tirage, on tire un jeton dans la boite $B_n$ et on arrête l'expérience. On note $X$ le numéro de la boite et $Y = 1$ si la boule tirée est blanche, 0 sinon. Déterminer la loi de $(X, Y)$ puis celle de $Y$.

**Définition :** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On dit que **les variables aléatoires discrètes $X$ et $Y$ sont indépendantes** si

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P(X = x, Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y)$$

On le note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$

Remarque(s) :

(II.14) Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors la loi de $Y$ sachant $(X = x)$ est la loi de $Y$ : pour $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a $P(Y = y |\, X = x) = P(Y = y)$.

(II.15) Lors d'une expérience aléatoire répétée deux fois de suite dans les mêmes conditions (tirage d'une boule avec remise, lancer de dé, ...), si on note $X$ le « résultat » de la première expérience et $Y$ celui de la deuxième, il est courant de modéliser l'expérience avec $X$ et $Y$ indépendantes.

Exemple(s) :

(II.16) Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $p \in ]0,1[$.
On suppose que la loi conjointe de $X$ et $Y$ vérifie

$$\mathcal{P}(X=k, Y=n) = \begin{cases} \binom{n}{k} a^n p(1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer la valeur de $a$.

b) Déterminer les lois de $X$ et $Y$.

c) Les variables $X$ et $Y$ sont elle indépendantes ?

**Théorème [II.4] :** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Les variables aléatoires discrètes $X$ et $Y$ sont indépendantes si et seulement si

$$\forall (A,B) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega), P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$$

**Définition :**

1. Soient $X_1, \dots, X_n$ $n$ variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont **indépendantes** si pour tout $k \in [\![2, n]\!]$ et tout $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ dans $[\![1, n]\!]$, on a

$$\forall (x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \in \prod_{j=1}^{k} X_{i_j}(\Omega), P\left(\bigcap_{1 \leqslant j \leqslant k} (X_{i_j} = x_{i_j})\right) = \prod_{j=1}^{k} P(X_{i_j} = x_{i_j})$$

2. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, on dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires discrètes **indépendantes** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille finie $X_1, \dots, X_n$ est indépendantes.
Une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes indépendantes est dite **identiquement distribuée** si les $X_n$ suivent toutes la même loi, ie
$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, X_i \sim X_j$$

Remarque(s) :

(II.17) Des variables aléatoires discrètes indépendantes sont 2 à 2 indépendantes mais la réciproque est fausse ; c/ex : on lance deux fois un dé à 6 faces, on note $X = 1$ (resp. $Y = 1$ et $Z = 1$) si le premier (resp. le second, la somme des 2) tirage est pair, 0 sinon. Les variables aléatoires discrètes $X$, $Y$ et $Z$ sont 2 à 2 indépendantes mais pas indépendantes.

(II.18) Pour tester si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, il faut tester $2^n - n - 1$ ensembles d'indices $i_1 < \dots < i_k$.

(II.19) Si $X_1, \dots, X_n$ est une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes alors toute sous famille de $X_1, \dots, X_n$ est une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes.

(II.20) Si on lance une pièce une infinité de fois et si $X_n$ est définie par $X_n = \begin{cases} 1 & \text{si pile au lancer } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera modélisée comme une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes identiquement distribuées, suivant une loi de Bernoulli.

**Théorème [II.5] :** Soient $X_1, \dots, X_n$ $n$ variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Les variables aléatoires discrètes $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si on a

$$\forall (A_1, \dots, A_n) \subset \prod_{j=1}^{n} X_i(\Omega), P\left(\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} (X_i \in A_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i)$$

**Propriété [II.6] :**

1. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, $f$ une application définie sur $X(\Omega)$ et $g$ une application définie sur $Y(\Omega)$.
$$X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$$
2. Généralisation : si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et si $f_1, \ldots, f_n$ sont des applications définies sur $X_i(\Omega)$ respectivement alors

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes alors $f(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ sont indépendantes.

Remarque(s) :

(II.21) Dans cette propriété, on peut avoir $f_1 = \cdots = f_n$ (à part $f_i$ définie sur $X_i(\Omega)$, aucune hypothèse n'est nécessaire sur les $f_i$).

**Propriété [II.7] : (Lemme des coalitions)**

1. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, $m \in [\![1, n-1]\!]$, $f$ et $g$ deux applications définies respectivement sur $X_1(\Omega) \times \cdots \times X_m(\Omega)$ et $X_{m+1}(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$ alors

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes alors $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes

2. Généralisation : si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, si $I_1, \ldots, I_k$ est une partition de $[\![1, n]\!]$ et si $f_1, \ldots, f_k$ sont définies respectivement sur $\displaystyle\prod_{i \in I_h} X_i(\Omega)$, pour $h \in [\![1, k]\!]$, alors

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes alors $f_1((X_h)_{h \in I_1}), \ldots, f_k((X_h)_{h \in I_k})$ sont indépendantes

Remarque(s) :

(II.22) Le lemme des coalitions permet entre autres de prouver que si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes alors $X_1 + \cdots + X_{n-1}$ et $X_n$ sont indépendantes.

# III Lois usuelles

## 1. Variables aléatoires discrètes finies

**Définition [III.1] : (Loi uniforme)**
Soit $X$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$. On dit que $X$ suit une loi de probabilité uniforme si $X(\Omega)$ est un ensemble fini de cardinal $n$ et si
$$\forall x \in X(\Omega), P(X = x) = \frac{1}{n}$$
On le note $X \sim \mathscr{U}(n)$.

Exemple(s) :

(III.1) On lance un dé à 6 faces équilibré. Si $X$ est la variable aléatoire discrète égale au numéro de la face obtenue alors $X \sim \mathcal{U}(6)$.

**Définition [III.2] : (Loi de Bernoulli)**
Soient $X$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$ et $p \in ]0, 1[$. On dit que $X$ suit une **loi de Bernoulli de paramètre** $p$ si
$$X(\Omega) = \{0, 1\} \quad \text{et} \quad \begin{cases} P(X = 1) = p \\ P(X = 0) = 1 - p \end{cases}$$
On le note $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Remarque(s) :

(III.2) Les variables de Bernoulli sont utiles pour modéliser une expérience à deux issues : si on tire une boule dans une urne contenant $k$ boules blanches et $n - k$ boules noires, la variable aléatoire discrète $X = 1$ si la boule est blanche, 0 si elle est noire suit une loi $\mathscr{B}\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

(III.3) Un tirage de pile ou face avec une pièce équilibrée suit $\mathscr{U}(2)$ ou $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

(III.4) Une pièce donne pile avec une probabilité $p$ (et face avec une probabilité $1-p$). On lance cette pièce une infinité de fois. L'expérience peut être modélisée par une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes identiquement distribuées $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui suivent toutes $\mathscr{B}(p)$.

**Définition** [**III.3**] **: (Loi binomiale)**
Soient $X$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, $p \in ]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que $X$ suit une **loi binomiale de paramètres** $n$ **et** $p$ si

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0,n]\!], P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On le note $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

**Propriété** [**III.4**] **:** Si $X_1, \ldots, X_n$ sont $n$ variables aléatoires discrètes indépendantes et suivant toutes une loi $\mathscr{B}(p)$ alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi $\mathscr{B}(n,p)$.

Remarque(s) :

(III.5) Cela signifie que $\mathscr{B}(n,p)$ est utilisée pour modéliser le nombre de gains dans une succession de $n$ expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p$ : par exemple le nombre de boules blanches obtenues dans une expérience de $n$ tirages successifs avec remise, ou dans un jeu de pile ou face répété $n$ fois.

## 2. Variables aléatoires discrètes infinies

**Définition** [**III.5**] **: (Loi géométrique)**
Soit $X$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et $p \in ]0,1[$. On dit que $X$ suit une **loi géométrique de paramètre** $p$ si

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$$

On le note $X \sim \mathscr{G}(p)$.

**Propriété** [**III.6**] **:** Si $X \sim \mathscr{G}(p)$ avec $p \in ]0,1[$ alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X > k) = (1-p)^k$$

Exemple(s) :

(III.6) Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{G}(p)$ et $Z = \min(X,Y)$. Vérifier que $Z$ suit une loi géométrique.

**Propriété** [**III.7**] **:** Soit $(X_n)_n \in \mathbb{N}^*$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes et identiquement distribuées suivant toutes la même loi $\mathscr{B}(p)$. On définit la variable aléatoire discrète $T$ par

$$T = \min\{k \in \mathbb{N}^*, X_k = 1\} \text{ et } T = +\infty \text{ si l'ensemble est vide}$$

Alors la variable aléatoire discrète $T$ suit la loi $\mathscr{G}(p)$.

$$T \sim \mathscr{G}(p)$$

Remarque(s) :

(III.7) $T$ désigne le temps d'attente du premier succès dans la suite d'expériences modélisée par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ : par exemple l'obtention d'un premier pile dans un jeu de pile ou face infini, l'obtention d'un premier 6 dans une expérience de lancer de dé infinie,...

Exemple(s) :

(III.8) On lance un dé à 6 faces équilibré une infinité de fois. Déterminer la probabilité de ne pas obtenir un 6 dans les 10 lancers suivants sachant qu'on n'a pas fait de 6 dans les 100 premiers lancers.

(III.9) Plus généralement (loi sans mémoire) : si $X$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Alors $X$ suit une loi géométrique si et seulement si

$$\forall (n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2, P(X > n+k |\, X > n) = P(X > k)$$

**Définition [III.8] : (Loi de Poisson)**
Soient $X$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et $\lambda > 0$ un réel. On dit que $X$ suit une **loi de Poisson de paramètre** $\lambda$ si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

On le note $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

Exemple(s) :

(III.10) Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant respectivement $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{P}(\mu)$. Alors la variable aléatoire discrète $X + Y$ suit la loi $\mathscr{P}(\lambda + \mu)$.

**Propriété [III.9] :** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n$ suit une loi $\mathscr{B}(n, p_n)$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$ alors on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ fixé

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Remarque(s) :

(III.11) On dit que la loi de Poisson est la loi des événements rares.

Exemple(s) :

(III.12) On considère une masse de matière qui contient $n$ atomes radioactifs. On suppose que chacun d'eux possède, indépendamment des désintégrations des autres atomes, une probabilité $p$ de se désintégrer à un instant $\leqslant t_k$ donné ; on suppose que cette probabilité est très faible devant $n$. Le nombre d'atomes qui se désintègrent à un instant $\leqslant t_k$ est une variable aléatoire discrète qui suit $\mathscr{B}(n, p)$. Si on suppose que durant un laps de temps $T = np$ fixé, on observe un nombre constant $\lambda$ de désintégrations alors on peut approcher le nombre de désintégrations à l'instant $\leqslant t_k$ par une variable aléatoire discrète suivant $\mathscr{P}(\lambda)$.
En comptant le nombre de désintégrations pendant un temps donné, un compteur Geiger peut alors donner le nombre d'atomes radioactifs présents dans la masse.

# IV Espérance et variance d'une variable aléatoire discrète réelle

## 1. Espérance

**Définition :** Soit $X$ une variable aléatoire discrète réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

**1.** Si $X$ est à valeurs positives (ie $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$) alors l'**espérance** de $X$ est

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) \quad \in [0, +\infty]$$

**2.** Si $X$ est à valeurs réelles ou complexes, on dit que $X$ est d'**espérance finie** si la famille $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, ie si

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x|P(X = x) < +\infty$$

Dans ce cas, l'**espérance** de $X$ est

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

Une variable aléatoire discrète $X$ d'espérance finie est dite **centrée** si $E(X) = 0$.

Remarque(s) :

*IV.1* Rappel : si $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ avec $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$ alors $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{n \geqslant 0} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente. La nature de cette série ne dépend pas de l'ordre dans lequel on numérote les éléments de $X(\Omega)$.

*IV.2* Si $X$ est à valeurs dans $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ fini, on a $E(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k)$ (somme finie).

*IV.3* Soit $X$ une variable aléatoire discrète réelle à valeurs bornées. Alors $X$ est d'espérance finie.

**Propriété [IV.1] : (Espérance des variables de lois usuelles)**
Soit $X$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Si $X \sim \mathscr{U}(n)$ et $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, alors $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$.
2. Si $X \sim \mathscr{B}(p)$ alors $E(X) = p$.
3. Si $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ alors $E(X) = np$.
4. Si $X \sim \mathscr{G}(p)$ alors $E(X) = \dfrac{1}{p}$.
5. Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ alors $E(X) = \lambda$.

**Propriété [IV.2] :** Soit $X$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Alors $X$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geqslant 1} P(X \geqslant n)$ converge. Dans ce cas

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$$

Remarque(s) :

*IV.4* Sous ces hypothèses, si $P(X = +\infty) > 0$, alors on a $E(X) = +\infty$

Exemple(s) :

*IV.5* Retrouver l'espérance d'une variable aléatoire discrète suivant $\mathscr{G}(p)$.

## 2. Propriétés de l'espérance

**Propriété [IV.3] : (Théorème de comparaison)**
Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires discrètes telles que $|X| \leqslant Y$ et si $Y$ est d'espérance finie alors

$$X \text{ est d'espérance finie.}$$

Dans ce cas, on a de plus $|E(X)| \leqslant E(Y)$.

**Propriété [IV.4] : (Linéarité de l'espérance)**
Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes réelles sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ d'espérances finies et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ alors $\alpha X + \beta Y$ est d'espérance finie et

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$$

Remarque(s) :

(IV.6) Si $X$ est une variable aléatoire discrète réelle d'espérance finie alors $X^* = X - E(X)$ est centrée.

**Propriété [IV.5] : (Positivité et croissance de l'espérance)**
Soit $X$ une variable aléatoire discrète réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ d'espérance finie.

1. Si $X$ est à valeurs positives, ie $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$, alors $E(X) \geqslant 0$.
   De plus si $E(X) = 0$ alors $P(X = 0) = 1$ ($X$ est presque sûrement nulle).
2. Si $Y$ est une autre variable aléatoire discrète réelle d'espérance finie et si $X \leqslant Y$ alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

**Théorème [IV.6] : (Théorème de transfert)**
Soient $X$ une variable aléatoire discrète réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et $f$ une application définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs réelles. La variable aléatoire discrète $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, ie $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} |f(x)|P(X = x) < +\infty$.
Dans ce cas, on a

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$$

Remarque(s) :

(IV.7) Si $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ avec $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$, la famille $(f(x)P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable signifie que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} f(x_n)P(X = x_n)$ est <u>absolument</u> convergente. Dans ce cas, on a

$$E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)P(X = x_n)$$

(IV.8) Si $f$ est à valeurs positives, on peut toujours écrire $E(f(X)) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$ avec $E(f(X)) \in [0, +\infty]$.

(IV.9) Le théorème de transfert permet de calculer $E(f(X))$ à partir de la loi de $X$, sans avoir à calculer la loi de $f(X)$.

(IV.10) Cette formule peut s'appliquer à toute variable aléatoire discrète , donc aussi à un couple de variables aléatoires discrètes $Z = (X, Y)$ (ou un $n$-uplet de variables aléatoires discrètes ) : si $f$ est définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et à valeurs réelles, $f(Z) = f(X, Y)$ est d'espérance finie si et seulement si $\displaystyle\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} |f(x, y)|P(X = x, Y = y) < +\infty$ et dans ce cas

$$E(f(X, Y)) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} f(x, y)P(X = x, Y = y)$$

Exemple(s) :

IV.11 Soit $X$ une variable aléatoire discrète suivant $\mathscr{G}(p)$. Déterminer l'espérance de $\dfrac{1}{X}$.

IV.12 Calculer $E(XY)$ pour les variables $X$ et $Y$ de l'ex II.17

**Propriété [IV.7] :**

**1.** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes réelles sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ d'espérances finies.
Si $X$ et $Y$ sont indépendantes alors $XY$ est d'espérance finie et

$$E(XY) = E(X) \times E(Y)$$

**2.** Généralisation : si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires discrètes réelles indépendantes et d'espérance finie alors $\prod_{i=1}^{n} X_i$ est d'espérance finie et

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

*Attention : La réciproque est fausse : on peut avoir $E(XY) = E(X)E(Y)$ avec $X$ et $Y$ non indépendantes.*

**Propriété [IV.8] : (Inégalité de Markov)**
Soit $X$ une variable aléatoire discrète réelle positive sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant une espérance finie. Pour tout $\alpha > 0$, on a

$$P(X \geqslant \alpha) \leqslant \frac{E(X)}{\alpha}$$

Remarque(s) :

IV.13 Cette inégalité n'a bien sûr aucun intérêt si $\alpha \leqslant E(X)$ (donc si $\alpha$ est petit).

### 3. Variance

**Propriété [IV.9] :** Si $X$ est une variable aléatoire discrète réelle telle que $X^2$ est d'espérance finie alors $X$ est d'espérance finie et on a

$$E(X)^2 \leqslant E\left(X^2\right)$$

Remarque(s) :

IV.14 Plus généralement si $X^k$ est d'espérance finie alors $X^h$ est aussi d'espérance finie pour $h \leqslant k$.

**Définition [IV.10] :** Soit $X$ une variable aléatoire discrète réelle. Si $X^2$ est d'espérance finie, on dit que $X$ **admet un moment d'ordre** 2 et on définit la **variance de** $X$, notée $V(X)$, par

$$V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E\left(X^2\right) - E(X)^2$$

Dans ca cas, on définit aussi son **écart type**, note $\sigma(X)$, par

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

On dit qu'une variable aléatoire discrète $X$ est **réduite** si $V(X) = 1$.

Remarque(s) :

IV.15 La variance d'une variable aléatoire discrète est donc toujours positive !

IV.16 La variance (et l'écart type) mesurent la dispersion des valeurs de $X$ par rapport à sa moyenne (son espérance).

*IV.17* On dit que $X$ admet un moment d'ordre $k \in \mathbb{N}$ si $X^k$ est d'espérance finie. Ainsi $X$ est d'espérance finie si et seulement si $X$ admet un moment d'ordre 1. Toute variable aléatoire discrète admet un moment d'ordre 0 : $E(X^0) = 1$.

**Propriété [IV.11] : (Variance des variables de lois usuelles)**
Soit $X$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Si $X \sim \mathscr{U}(n)$ et $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, alors $V(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$.
2. Si $X \sim \mathscr{B}(p)$ alors $V(X) = p(1-p)$.
3. Si $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ alors $V(X) = np(1-p)$.
4. Si $X \sim \mathscr{G}(p)$ alors $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.
5. Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ alors $V(X) = \lambda$.

**Propriété [IV.12] :** Soit $X$ une variable aléatoire discrète réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant un moment d'ordre 2 alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la variable aléatoire discrète $aX + b$ admet un moment d'ordre 2 et

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Remarque(s) :

*IV.18* Si $X$ est une variable aléatoire discrète réelle admettant une variance alors la variable aléatoire discrète $\dfrac{1}{\sigma(X)}(X - E(X))$ est réduite et centrée.

**Propriété [IV.13] : (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**
Soit $X$ une variable aléatoire discrète réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant un moment d'ordre 2. Alors, pour tout $\alpha > 0$, on a

$$P(|X - E(X)| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{V(X)}{\alpha^2}$$

Remarque(s) :

*IV.19* L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet de contrôler la probabilité que $X$ s'écarte de sa moyenne.

*IV.20* Là encore, cette inégalité est sans intérêt si $\alpha$ est petit ($\alpha \leqslant \sqrt{V(X)}$).

**Définition [IV.14] :** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes réelles sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant des moments d'ordre 2. On définit la **covariance de** $X$ **et** $Y$, notée $\mathrm{Cov}(X, Y)$ par

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Remarque(s) :

*IV.21* Si $V(X) > 0$ et $V(Y) > 0$, on définit également le *coefficient de corrélation de $X$ et $Y$*, noté $\rho(X, Y)$, par $\rho(X, Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$

**Conséquence [IV.15] :** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes réelles sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant des moments d'ordre 2. On a :

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
2. Si $X$ et $Y$ sont indépendantes alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Remarque(s) :

*IV.22* Pour calculer $E(XY)$, on peut utiliser le théorème de transfert si on connait la loi du couple $(X,Y)$.

*IV.23* On peut avoir $\text{Cov}(X,Y)=0$ sans que $X$ et $Y$ soient indépendantes (ie la réciproque de **2.** est fausse) : si $U$ et $V$ sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{B}(p)$, $X=2U-V$ et $Y=U+2V$ alors $\text{Cov}(X,Y)=0$ mais $P(X=0,Y=0)\neq P(X=0)P(Y=0)$ donc $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes.

**Propriété [IV.16] : (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**
Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes réelles sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$ admettant des moments d'ordre 2. Alors $XY$ est d'espérance finie et

$$E(XY)^2 \leqslant E\left(X^2\right)\times E\left(Y^2\right)$$

Remarque(s) :

*IV.24* On a donc $(\text{Cov}(X,Y))^2\leqslant V(X)\times V(Y)$ et $-1\leqslant\rho(X,Y)\leqslant 1$.

**Propriété [IV.17] :** Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires discrètes réelles admettant des moments d'ordre 2, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$. Alors $X_1+\cdots+X_n$ admet un moment d'ordre 2 et

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=\sum_{i=1}^n V(X_i)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\text{Cov}(X_i,X_j)$$

Si on suppose de plus que les $X_i$ sont deux à deux indépendantes alors on a

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=\sum_{i=1}^n V(X_i)$$

**Théorème [IV.18] : (Loi faible des grands nombres)**
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes réelles indépendantes et identiquement distribuées. Si $X_1$ (donc tous les $X_i$) admet un moment d'ordre 2 et si on note $m=E(X_1)$ (leur espérance commune), $\sigma=\sigma(X_1)$ (leur écart type commun) et $S_n=\sum_{k=1}^n X_k$ alors on a, pour tout $\varepsilon>0$ fixé,

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n-m\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}\quad\text{donc}\quad\lim_{n\to+\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}S_n-m\right|\geqslant\varepsilon\right)=0$$

Remarque(s) :

*IV.25* Il suffit en fait que les variables aléatoires discrètes soient 2 à 2 indépendantes.

*IV.26* Une fois de plus, cela n'a d'intérêt que si $\varepsilon$ est assez grand ($\varepsilon>\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$).

Exemple(s) :

*IV.27* On dispose d'une pièce dont on souhaite déterminer la probabilité $p$ qu'elle donne pile. Pour cela, on la lance un grand nombre de fois et on note $X_k$ la variable aléatoire discrète de Bernoulli égale à 1 quand le $k^{\text{ème}}$ tirage donne pile et $S_n=\sum_{k=1}^n X_k$ la variable aléatoire discrète donnant le nombre de pile lors des $n$ premiers lancers. $X_k$ suit $\mathscr{B}(p)$ donc $E(X_k)=p$ et $V(X_k)=p(1-p)$. La loi faible des grands nombres donne $P\left(\left|\frac{1}{n}S_n-p\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\dfrac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}\leqslant\dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$. Ainsi la probabilité que $\frac{1}{n}S_n$ soit une valeur approchée de $p$ à $\varepsilon$ près sera supérieure à $\alpha$ à condition que $n\geqslant\dfrac{1}{4(1-\alpha)\varepsilon^2}$.

# V Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète

Dans toute cette partie, on considère des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$, ie telles que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

**Définition :** Soit $X$ une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle **fonction génératrice de** $X$, la fonction $G_X$ définie, lorsque la série entière de variable réelle $t$ converge, par

$$G_X(t) = E\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) \times t^n$$

Remarque(s) :

(V.1) Si $X(\Omega)$ est un ensemble fini, alors $G_X$ est un polynôme.

(V.2) On a $G_X(1) = P(X \in \mathbb{N}) = 1$.

**Propriété [V.1] :** Le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} P(X = n) \times t^n$ est au moins égal à 1 et la série **converge normalement sur** $[-1, 1]$.

**Conséquence [V.2] :** La loi d'une variable aléatoire discrète $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ est entièrement déterminée par la fonction $G_X$ :

1. $G_X$ est continue sur $[-1, 1]$ (au moins)
2. la fonction $G_X$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ (au moins) et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

Remarque(s) :

(V.3) La fonction $G_X$ peut ne pas être dérivable en $\pm 1$ (cf lien avec l'espérance plus loin).

**Propriété [V.3] : (Fonctions génératrices des lois usuelles)**
Soit $X$ une variable aléatoire discrète .

1. Si $X \sim \mathscr{B}(p)$ alors, pour $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = (1 - p) + pt$ et $R_X = +\infty$.
2. Si $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = [(1 - p) + pt]^n$ et $R_X = +\infty$.
3. Si $X \sim \mathscr{U}(n)$ et $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} t^k$ et $R_X = +\infty$.
4. Si $X \sim \mathscr{G}(p)$ alors, pour $|t| < \dfrac{1}{1 - p}$, $G_X(t) = \dfrac{pt}{1 - (1 - p)t}$ et $R_X = \dfrac{1}{1 - p}$.
5. Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ et $R_X = +\infty$.

**Propriété [V.4] :**

1. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes. Si on note $R_X$ et $R_Y$ les rayons de convergences des fonctions génératrices $G_X$ et $G_Y$ respectivement, on a :

$$\forall |t| < \min(R_X, R_Y), G_{X+Y}(t) = G_X(t) \times G_Y(t)$$

On a donc $R_{X+Y} \geqslant \min(R_X, R_Y)$.

**2.** Généralisation : si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires discrètes entières indépendantes alors

$$\forall |t| < \min(R_{X_1}, \dots, R_{X_n}), G_{X_1+\dots+X_n}(t) = G_{X_1}(t) \times \dots \times G_{X_n}(t)$$

Remarque(s) :

(V.4) On peut, à l'aide de cette propriété, retrouver la fonction génératrice d'une loi binomiale à partir de le fonction génératrice d'une loi de Bernoulli.

Exemple(s) :

(V.5) Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes suivant toutes la même loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Déterminer $G_{S_n}$ et en déduire la loi de $S_n$.

**Théorème [V.5] :** Soit $X$ une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $G_X$ sa fonction génératrice.

**1.** $X$ admet une espérance finie si et seulement si $G_X$ est dérivable en 1. De plus, dans ce cas, on a

$$E(X) = G'_X(1)$$

**2.** $X$ admet un moment d'ordre 2 si et seulement si $G_X$ est deux fois dérivable en 1. De plus dans ce cas, on a

$$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$$

Remarque(s) :

(V.6) On peut retrouver ainsi les espérances et les variances des lois usuelles.

Exemple(s) :

(V.7) On considère l'expérience suivante : on lance une pièce équilibrée une infinité de fois, tant qu'on obtient « pile », on lance un dé équilibré à 6 faces et on avance un pion sur un plateau de jeu d'un nombre de cases égal au numéro de la face du dé (on suppose le plateau infini) ; dès qu'on obtient « face », le jeu s'arrête. On note $N$ la variable aléatoire discrète égale au nombre de fois où on avance le pion, $X_k$ la variable aléatoire discrète donnant le numéro de la face du dé obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage et $S$ la variable aléatoire discrète égale au nombre de cases dont le pion a avancé à la fin du jeu.

a) Montrer que $P(S = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} P(X_1 + \dots + X_k = n)$.

b) Montrer que, si $|t| \leqslant 1$, $G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1 + \dots + X_k = n) t^n$.

c) En déduire que $S$ admet une espérance finie et que $E(S) = \frac{7}{2}$.