TD18 : Endomorphismes autoadjoints

Exercice 1

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale

Exercice 2 (CCINP PSI 2018)
Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$.

1. Trouver un polynôme annulateur de M de degré 4.

2. Montrer que $M - I_n$ est inversible.

3. Trouver M
indication : montrer que M est symétrique.

4. *Question rajoutée :* Faire de même en ne supposant plus M inversible.
indication : montrer que M est inversible en calculant $(MX|X)$ pour $X \in \ker(M)$.

Exercice 3 (CCP PSI 2017)
Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^T M = MM^T$ et $M^2 + 4I_2 = 0$.

1. Montrer que $M^T M$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

2. Trouver un polynôme de degré 2 annulateur de $M^T M$, en déduire son spectre, puis que $\frac{1}{2}M$ est orthogonale.

3. Trouver M.

Exercice 4 (Mines-Télécom PSI 2022)

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ non nulle ; montrer que $\dfrac{(\operatorname{Tr} A)^2}{\operatorname{Tr}(A^2)} \leqslant \operatorname{rg}(A)$.
indication : calculer avec les valeurs propres de A plutôt que ses coefficients

Exercice 5 (CCINP PSI 2021)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M\left(M^T M\right)^2 = I_n$.

1. À l'aide du déterminant, montrer que M est inversible.

2. En déduire que M est symétrique.

3. Conclure que $M = I_n$.

Exercice 6 (Mines-Ponts PSI 2022)
Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle, montrer que $\operatorname{Tr}(AA^T) > 0$

2. Soit $S \in \mathcal{E}$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^T A$

3. Soit $(S, S') \in \mathcal{E}^2$. Montrer $\operatorname{Tr}(SS') > 0$

Exercice 7 (Mines-Ponts PSI 2019)
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique ; on suppose $\operatorname{Sp}(B) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

1. Montrer qu'il existe une unique matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $\operatorname{Sp}(R) \subset \mathbb{R}^{+*}$ et $B = R^2$.
indication : l'unicité ne servira à rien pour la suite.

2. En déduire que AB est diagonalisable.
indication : vérifier que AB est semblable à RAR

3. Montrer que si $\operatorname{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ alors $\operatorname{Sp}(AB) \subset \mathbb{R}^+$.

Exercice 8 (Mines-Ponts PSI 2021)
Soit $(U, V) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $\forall X \in \mathbb{R}^n, (UX|X) \geqslant 0$ et $(VX|X) \geqslant 0$, $(\,|\,)$ désignant le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que $\det(U + V) \geqslant \det(U) + \det(V)$. On pourra commencer par le cas où U et V ne sont pas inversibles, puis $V = I_n$ et enfin $V \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ quelconque.
indication :

— *Si U et V non inversible, montrer $\operatorname{Sp}(U + V) \in \mathbb{R}^+$.*
— *Dans le cas V inversible, écrire $V = W^2$ et se ramener au cas $V = I_n$.*