TD19 : Variables aléatoires

Exercice 1 **(CCINP PSI 2022)**
On étudie succession de lancers d'une pièce équilibrée. X est la variable aléatoire qui décrit le premier rang de la séquence « pile-face » ($(X = k)$ si pile au lancer k et face au lancer $k+1$). Y est la variable aléatoire qui décrit le premier rang de « pile »

1. Donner la loi conjointe de (X, Y).
2. En déduire la loi de X.
3. Calculer $E(X)$.

Exercice 2 **(CCINP PSI 2021)**
Le nombre d'enfants d'une famille N suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque enfant à la probabilité $p \in]0,1[$ d'être une fille, indépendamment des autres. On note X le nombre de filles.

1. Déterminer la loi conjointe de N et X
2. Donner la loi de X.

Exercice 3 **(CCINP PSI 2022)**
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{P}(\mu)$. On pose $Z = X + Y$.

1. Déterminer la loi de Z.
2. Déterminer la loi de X sachant $(Z = n)$.

Exercice 4 **(Mines-Télécom PSI 2022)**
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on dit que A vérifie (P) si $\mathcal{X}_A = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - a_{i,i})$

1. Donner des exemples de matrices vérifiant (P)
2. X_1, X_2, X_3 sont trois variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{G}(p)$.
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & X_1 - X_2 & X_2 - X_3 \\ X_1 - X_2 & 0 & 0 \\ X_2 - X_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quelle est la probabilité que A vérifie (P) ?

Exercice 5 **(CCINP PSI 2021)**
Soit un dé équilibré à 10 faces numérotées de 1 à 10. On lance le dé jusqu'à obtenir un chiffre inférieur ou égal à 6. On note X le chiffre du dernier lancer.

1. Soit N le nombre de lancers obtenue. Déterminer la loi de N.
2. Pour tout $(k, n) \in [\![1, 6]\!] \times \mathbb{N}^*$, calculer $P(X = k, N = n)$.
3. Calculer $P(X = k)$. En déduire la loi de X.
4. Les variables X et N sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 **(AADN PSI 2015)**
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant $P(X = i, Y = j) = \dfrac{a}{2^{i+1} j!}$ où $a > 0$.

1. Déterminer a.
2. Déterminer les lois de X et de Y ; sont-elles indépendantes ?
3. Vérifier que $1 + X$ suit une loi géométrique.
4. Déterminer $P(X = Y)$ et en déduire la probabilité que $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 7 **(Mines-Ponts PSI 2019)**
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{G}(p)$.

1. On pose $S = X + Y$, trouver la loi de S.
2. Reconnaître la loi de X sachant $(S = k)$.
3. Soit Z une variable aléatoire discrète indépendante de X et Y, telle que $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P(Z > n + 1 | Z > n) = 1 - p$, reconnaître $1 + Z$.
4. Calculer $P(S = Z)$

Exercice 8 **(Mines-Ponts PSI 2019)**

1. 2 variables aléatoires discrètes indépendantes X et Y suivent $\mathscr{G}(p)$. Donner la loi de $T = \min(X, Y)$, son espérance et sa fonction génératrice.
2. Montrer que $\dfrac{1}{T(T+1)}$ admet une espérance et la calculer.