ΠΣΙ2.Bilans macroscopiques en mécanique des fluides. Propositions de solution.

Exercice 0.

1)On obtient :

$$P_1 + \frac{\mu}{2}v_1^2 + \mu g z_1 = P_2 + \frac{\mu}{2}v_2^2 + \mu g z_2$$

2)On réorganise :

$$\frac{\mu}{2}(v_2^2 - v_1^2) = (P_1 - P_2) + \mu g(z_1 - z_2)$$

Et on multiplie par D_v :

$$\frac{\mu D_v}{2}(v_2^2 - v_1^2) = (P_1 - P_2)D_v + \mu g D_v(z_1 - z_2)$$

3)Ceci est un bilan de puissance en W et est en fait le TEC : la variation de puissance cinétique est égale aux puissances des forces appliquées (force de pression et poids)

4)J'ajoute maintenant la puissance mécanique fournie par la pompe à l'eau :

$$\frac{\mu D_v}{2}(v_2^2 - v_1^2) = (P_1 - P_2)D_v + \mu g D_v(z_1 - z_2) + \mathcal{P}$$

Il n'y plus qu'à sortir $\mathcal{P}$.

5)section 1 : surface libre du liquide
section 2 : sortie de la lance à la hauteur h de la surface libre du liquide
On prend une ligne de courant entre les deux sections : $P_1 = P_2$ et $h = (z_2 - z_1)$
On sort maintenant :

$$h = \frac{1}{g}\left(\frac{\mathcal{P}}{\mu D_v} - \frac{v_2^2}{2}\right)$$

On utilise maintenant : $D_v = v_2.S$ avec $S = \frac{\pi d^2}{4}$ et on élimine v_2 :

$$h = \frac{1}{g}\left(\frac{\mathcal{P}}{\mu D_v} - \frac{D_v^2}{2S^2}\right) < 40m$$

Exercice 1.

1)Il faut comparer la force de poussée au départ 250kN au poids total 100kN . La fusée décolle.

2)$q = -\frac{dm\prime}{dt}$ étant constant, on peut intégrer et on obtient avce les CI : $m'(t) = m'_o - qt$ qui ne peut être négative. Donc le moteur fusée s'arrête à l'instant $t_1 = \frac{m'_o}{q} = 64s$

Ensuite on a une chute libre verticale avec vitesse initiale non nulle et la fusée revient (théoriquement) à son point de départ. A un instant t_2 , la vitesse s'annulle et on a atteint le maximum d'altitude.

3)On peut intégrer 2 fois le PFD obtenu en cours en tenant compte des CI. C'est un peu long. On peut vérifier que les fonctions fournies vérifient les conditions initiales, que la dérivée temporelle de z donne bien la vitesse et que la dérivée temporelle de la vitesse donne bien l'accélération donnée par le PFD. Un peu plus rapide car on ne fait que des dérivations.

4)Pour $t > t_1$, le PFD donne maintenant :

$$\ddot{z} = -g$$

Qui donne :

$$\dot{z} = -g(t - t_1) + v(t_1) \;\; qui\; s'annule \text{ à } l'instant \;\; t_2 = t_1 + \frac{v(t_1)}{g}$$

Puis

$$z(t) = -\frac{g}{2}(t - t_1)^2 + v(t_1)(t - t_1) + z(t_1)\; mais\; aussi\; z(t) = -\frac{g}{2}(t - t_2)^2 + z(t_2)$$

La fusée revient au sol à l'instant $t_3 = t_2 + \sqrt{\frac{2z(t_2)}{g}}$.

ATTENTION : la loi horaire est parabolique mais la trajectoire est verticale, d'abord ascendante jusqu'à t_2 puis descendante.

Exercice 3. Bernoulli Venturi.

a)Avec l'éjection de matière à la sortie du propulseur, l'enceinte ne va pas rester dans les conditions extérieures de départ.

b)Il faut que la matière éjectée sorte de l'enceinte et que la pressions reste égale à 50mbar dans l'enceinte. on va tout simplement vider les réservoirs d'eau chaude par une canalisation de section variable qui passe d'abord par l'arrière de l'enceinte près de la matière éjectée avant de déboucher à l'air libre.

Au niveau de l'enceinte, on réduit de façon importante la section de la canalisation. La conservation du débit entraine l'augmentation de vitesse à ce moment et le théorème de bernoulli entraine alors une chute de pression. On s'arrange pour que la pression atteigne 50mbar.

A Saint-Médard en Salles, l'éjection de l'eau , facilement détectable par son nuage et son bruit, dure environ 3 minutes.

Exercice 5. Tube de Pitot.

Les deux lignes de courant viennent de l'infini en aval où la pression vaut P_o et la vitesse v_o.
Pour la ligne de courant qui arrive en A, on a $v_A=0$ et le théorème de Bernoulli donne :

$$P_o + \frac{1}{2}\mu v_o^2 = P_A + 0 = P_C$$

Pour la ligne de courant qui longe B, on peut admettre $v_B=v_o$ et Bernoulli donne

$$P_o = P_B = P_D$$

en négligeant la chute de pression dans l'air entre B et D.
On calcule donc : $\frac{1}{2}\mu v_o^2 = P_C - P_D$.
La mesure de la différence de pression permet d'évaluer v_o.

Exercice 8.

On considère la ligne de courant suivante dans la conduite :

Point initial A en bas à l'altitude $z_A=0$, à la vitesse v_A, et à la pression $P_A=P_o$.

Point final B en haut à l'altitude z=30m, à la vitesse v_B, et à la pression $P_B=1,5P_o$

Comme la section est constante, la conservation du débit volumique conduit à $v_A=v_B=v$
Exprimons l'énergie volumique du fluide aux deux points :

$$E_v(A) = P_A + \frac{\mu}{2}v_A^2 + \mu g z_A = P_o + \frac{\mu}{2}v^2$$

$$E_v(B) = P_B + \frac{\mu}{2}v_B^2 + \mu g z_B = E_v(A) + \frac{1}{2}.P_o + \mu g h > E_v(A)$$

La pompe doit donc fournir au moins l'énergie volumique manquante : $E_{vpompe} = \frac{1}{2}.P_o + \mu g h$
Pour avoir une puissance , il suffit de multipler par le débit volumique (check).

$$P_{pompe} = D_v.E_{vpompe} = D_v.\left(\frac{1}{2}.P_o + \mu g h\right) = 350\ W$$

Dans la réalité, à cause des frottements, il faudra évidemment fournir plus.

Exercice 09 :

1)*On applique Bernoulli sur une ligne de courant entre S_1 et S , id entre S' et S_2. On obtient deux équations:*

$$P_a + \frac{\mu v_1^2}{2} = P + \frac{\mu v^2}{2} \qquad P_a + \frac{\mu v_2^2}{2} = P' + \frac{\mu v'^2}{2}$$

D'autre part, la conservation du débit donne : $v_1S_1=vS=v'S'=v_2S_2$.

Comme $S\approx S'$, on obtient $v'\approx v$.

On peut alors relier P et P' : $P' - P = \frac{\mu}{2}(v_2^2 - v_1^2)$.

2.1)

Bilan de quantité de mouvement sur système fermé entre S et S' (cf cours, attention aux subtilités) donne $\frac{d\vec{p}}{dt} = D(\vec{v}' - \vec{v}) = \vec{0}$ *d'après la question 1.*

Donc la somme des forces appliquées est nulle : $(P - P')S\vec{u}_x + \vec{F} = \vec{0}$

Avec le résultat de la question 1, on sort : $\vec{F} = (P' - P)S\vec{u}_x = \frac{\mu S}{2}(v_2^2 - v_1^2)\vec{u}_x$

.

2.2) *Même bilan de quantité de mouvement avec le fluide inclus dans le tube de courant entre S_1 et S_2. Le même procédé donne :* $\frac{d\vec{p}}{dt} = D(C)$.

Pour les forces extérieures appliquées, on a $\vec{F}$ et la force de pression sur tout le contour, or ce contour est fermé et la pression y est uniforme, donc la force de pression est nulle.

La RFD (ou seconde loi de Newton) donne alors :

$$\vec{F} = D(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \mu S v(v_2 - v_1)\vec{u}_x$$

2.3)*On mélange les deux expressions , il sort si v_2 différent de v_1 :* $v = \frac{v_1+v_2}{2}$.

3)*Théorème de l'énergie cinétique appliquée sur le fluide dans le tube de courant entre S_1 et S_2. Méthode identique à Bernoulli. Le fluide étant incompressible et parfait, les forces intérieures ne travaillent pas, les seules contributions à prendre en compte sont le travail de la force $\vec{F}$, et les travaux des forces de pression amont (en S_1) et aval (en S_2).*

On se fixe un intervalle de temps dt.

Système : fluide dans le tube de courant entre S_1 et S_2 à l'instant t (énergie cinétique E_o)+ la matière qui rentre en S_1 à la pression P_a pendant l'intervalle de temps dt, soit la masse Ddt à la vitesse v_1, volume dV

A l'instant t+dt, ce système s'est décallé et la matière Ddt est sortie à droite à la vitesse v_2 sous la pression P_a, même volume dV car le fluide est incompressible.

Energie cinétique à l'instant t : $E_o + (Ddt)\frac{v_1^2}{2}$ *Energie cinétique à t+dt :* $E_o + (Ddt)\frac{2}{2}$

La force $\vec{F}$ fournit le travail P_F.dt

La force de pression amont fournit le travail : P_adV (le volume dV est poussé par l'extérieur sous la pression P_a) . la force de pression aval le travail P_a(-dV) (le volume dV pousse l'extérieur sous la pression P_a), soit le travail opposé .

Le tec donne alors, après simplification par dt : $P_F = \frac{D}{2}(v_2^2 - v_1^2) = F.v$ *si on reprend l'expression de F.*

Si P_F>0, cela conduit à v_2>v_1 soit S_2<S_1 à cause de la conservation du débit.

Exercice 10.Mines Ponts 2006 PSI, extrait principal.

1)*Régime permanent incompressible irrotationnel donc on peut appliquer le théorème de Bernoulli dans la conduite entre un point M de cette conduite et le point A :*

$$P_1(z) + \mu\frac{v^2(z)}{2} + \mu g z = P_A + \mu\frac{v^2(0)}{2} + \mu g.0$$

Or $P_A=P_o$ et la conservation du débit donne v(z)=v(0) car la section et la masse volumique sont constantes. On obtient alors : $P_1(z) = P_o\left(1 - \frac{\mu g z}{P_o}\right)$. *AN :* $z_o = \frac{P_o}{\mu g} = 10m$.

On remarque alors que la pression est une fonction décroissante de l'altitude et on atteint la pression de vapeur saturante (l'eau devient gazeuse) pour une altitude z_g=9,7m.

2)*On applique maintenant Bernoulli entre un point B (altitude H, vitesse quasiment nulle, pression P_o) de la surface de la retenue d'eau et le point de sortie de l'injecteur (altitude nulle, vitesse c, pression P_o) :*

$P_o + 0 + \mu g H = P_o + \mu\frac{c^2}{2} + 0$ *d'où :* $c = \sqrt{2gH}$.

La conservation du débit donne alors : $\pi\frac{D^2}{4}.V = \pi\frac{d^2}{4}.c$ *d'où :* $V = \left(\frac{d}{D}\right)^2 c = \left(\frac{d}{D}\right)^2\sqrt{2gH}$.

3)*Toujours Bernoulli entre un point M(altitude z, pression $P_2(z)$, vitesse V) et la sortie de l'injecteur et on obtient :*

$$P_2(z) = P_o + \mu g H\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) - \mu g z$$

Cette nouvelle fonction est une fonction décroissante de z. Donc si $P_2(H)>P_S$ (on remarque qu'on ne connaît pas h) alors, en tout point de la conduite forcée, la pression sera supérieure à P_S. On obtient alors :

$$d < d_o = D\left(\frac{P_o - P_S}{\mu g H}\right)^{1/4} \approx 25{,}6cm.$$

4)*En appliquant la formule* ***théorique*** *de Toricelli* ***à ce résultat expérimental****, la hauteur H' correspondante est* $H' = \frac{c'^2}{2g} \approx 273{,}8m$. *On calcule alors* $C_c = \left(\frac{c'}{c}\right)^2 \approx 0{,}91$.

L'eau n'est pas un fluide parfait, et il faut notamment compter les effets des frottements sur la surface de la conduite forcée, la viscosité propre de l'eau.

5)$q = cS = c\pi\frac{d^2}{4}$ *et* $D_m = \mu q = \mu c\pi\frac{d^2}{4}$. *AN : q≈0,87 $m^3.s^{-1}$ et D_m≈873 $kg.s^{-1}$.*

Pour les valeurs expérimentales : q'≈0,84 $m^3.s^{-1}$ et D'_m≈837 $kg.s^{-1}$.

La puissance cinétique est $P_c = D'_m.\frac{c'^2}{2} \approx 2{,}3MW$.

6)*Initialement, l'eau est immobile à l'altitude H (énergie cinétique nulle, énergie potentielle massique gH) et on la récupère en bas (énergie cinétique massique $c'^2/2$, énergie potentielle massique nulle)*

S'il n'y a pas de pertes pendant la descente de l'eau, la conservation de l'énergie donne $c'^2/2=gH$, l'énergie cinétique récupérée était initialement conservée sous forme d'énergie potentielle de pesanteur.

On peut donc définir $P_{pot}=D'_m gH$ la puissance potentielle de départ et la comparer à P_c, puissance cinétique disponible.

Calcul $\rightarrow \eta = \frac{P_c}{P_{pot}} = (C_c)^{3/2} \approx 0{,}87$.

7)*L'eau part de façon symétrique des deux côtés de l'auget ce qui limite les effets mécaniques asymétriques sur l'axe de rotation.*

8)*On définit* $\eta_{rot} = \frac{P}{P_c} \xrightarrow{calcul} 4.\frac{u}{c}\left(1 - \frac{u}{c}\right)$.

Posons x=u/c, on a alors η_{rot}(x)=4x(1-x). Une étude simple donne $\eta_{rotMax}=\eta_{rot}$(x=0,5)=1.

9)*Toute l'énergie cinétique de translation de l'eau est transformée en énergie cinétique de rotation de la turbine. La puissance cinétique de l'eau sortant de la turbine est nulle.*

10)*Pour atteindre le rendement maximal, il faut u=c/2=37$m.s^{-1}$. D'autre part u=RΩ.*

On calcule alors $R = \frac{c}{2\Omega} \approx 47cm$, *valeur compatible avec la photo fournie.*

On calcule alors : $$P_{\max} = P_c = D_m\frac{c^2}{2} = \mu q\frac{c^2}{2} \approx 4MW\ .$$

11)*En tenant compte du rendement réel : P=0,87P_{max}≈3,6MW.*

Pour le transfert maximal d'énergie, il faut que l'eau fasse réellement demi-tour dans l'auget. Le fluide n'est pas parfait, il faut tenir compte du travail des forces intérieures.

Corrigé exercice 11. Roue vanne de Sagebien.

A1)*Le débit volumique incident est $D_m = \mu(h_o d)v$. Lorsque une pale tourne de $d\beta$ pendant le temps dt, elle entraîne un volume d'eau*

$$dV = \frac{1}{2}d(R'^2 - R^2)d\beta = \frac{1}{2}d(R'^2 - R^2)\left(\frac{d\beta}{dt}\right)dt = \frac{1}{2}d(R'^2 - R^2)\omega dt = D_v dt = \frac{D_m}{\mu}dt$$

Donc :

$$h_o v = \frac{1}{2}(R'^2 - R^2)\omega$$

A2)*La vitesse moyenne d'un point de pale de roue est : $\frac{R+R\prime}{2}\omega$ qu'on veut égal à v.*
Avec la relation de la question 1, on obtient : $R' - R = h_o$.
AN : $h_o = \frac{D_m}{\rho v d} = 4{,}3m$ et $R' = 15{,}3m$. ω=0,046 s^{-1}.

A3)*On prend la loi de l'hydrostatique pour un fluide incompressible.*
Sur la partie gauche de la pale en contact avec l'eau en amont, on a : $p_c(z) = p_1(z) = p_o - \mu g z$
Sur la partie droite de la pale en contact avec l'eau en aval, on a : $p_d(z) = p_2(z) = p_o - \mu g z - \mu g H$

A4)*La différence de pression entre les deux côtés de la pale active est est répartie de manière uniforme et vaut : $\mu g H$. La force totale sur la pale est donc $\mu g H d \cdot (R' - R)\vec{e}_\theta$ qui s'applique au milieu de la pale I. On peut calculer son moment par rapport à l'axe de rotation qui sera le couple moteur :*

$$\vec{M} = \overrightarrow{OI} \wedge \mu g H d \cdot (R' - R)\vec{e}_\theta = \frac{R' + R}{2}\vec{e}_r \wedge \mu g H d \cdot (R' - R)\vec{e}_\theta = \mu g H d \cdot (R' - R) \cdot \frac{R' + R}{2}\vec{e}_x$$

On calcule M=2,29 10^6 Nm.

A5)*On a ω=0,046 s^{-1}, ce qui donne une puissance motrice P=$\Gamma\omega$=108kW.*
Un moteur Diesel usuel de 1,6L d'environ 120CV (soit environ 100kW) aura un couple moteur typique de 300Nm.

A6)*L'origine de cette puissance mécanique est tout simplement la chute d'eau de hauteur H, et vient donc de la variation de l'énergie potentielle de pesanteur.*

B1)*Le système est en fait constitué de l'eau contenue entre les deux sections droites plus la masse D_m dt qui va franchir la section gauche pendant l'intervalle de temps dt.*
La variation d'énergie cinétique du système est nulle.
Pendant l'intervalle de temps, la masse $D_m$dt chute de la hauteur H donc la variation d'énergie potentielle est –HgμD_mdt. Donc le travail du poids est + H$\mu g D_m$dt.
Reste à définir le travail de la force exercée par la roue sur l'eau et qu'on note dW.
Le travail des forces intérieures est nulle car l'eau est supposé incompressible.
LE TEC donne alors : dW=–H$\mu g D_m$dt.
La puissance reçue par l'eau est donc –H$\mu g D_m$. Donc la puissance fournie par l'eau à la roue est : H$\mu g D_m$=108kW.

B2)*On remarque que la puissance mécanique reçue par la roue est tout simplement la puissance potentielle perdue par l'eau. Le rendement est ici de 1.*
Dans la réalité, il est évidemment plus faible, à cause de l'écoulement de l'eau qui n'est aussi simple que décrit, des frottements mécaniques non pris en compte ici.

Exercice 12. Aileron.

4 Le fluide étant en écoulement incompressible, il y a conservation du débit volumique en régime stationnaire. En outre, la section du tube de courant est constante, donc la vitesse se conserve, et donc $v_1 = v_2$ et $\mathrm{d}m_1 = \mathrm{d}m_2$.

5 La quantité de mouvement du système varie entre t et $t + \mathrm{d}t$ de

$$\mathrm{d}\vec{p} = (\vec{p}_{\mathrm{A'B'CD}} + \vec{p}_{\mathrm{CC'D'D}}) - (\vec{p}_{\mathrm{AA'B'B}} + \vec{p}_{\mathrm{A'B'CD}})$$

(il n'y a pas de dépendance temporelle car l'écoulement est stationnaire). On obtient par conséquent :

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{p}_{\mathrm{CC'D'D}} - \vec{p}_{\mathrm{AA'B'B}} = \mathrm{d}m \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1),$$

où l'on a posé $\mathrm{d}m = \mathrm{d}m_1 = \mathrm{d}m_2$. Or, $\mathrm{d}m = \rho_0 \cdot \mathrm{S_e} \cdot v_1 \cdot \mathrm{d}t$, donc :

$$\mathrm{d}\vec{p} = \rho_0 \cdot \mathrm{S_e} \cdot v_1 \cdot \mathrm{d}t \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \rho_0 \cdot \mathrm{S_e} \cdot v_1 \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}$$

D'après la deuxième loi de Newton, $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{ext}}$, avec $\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{ext}}$ la force exercée sur le tube de courant, soit finalement :

$$\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{ext}} = \rho_0 \cdot \mathrm{S_e} \cdot v_1 \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

6 On déduit de ce qui précède, en vertu de la troisième loi de Newton, que :

$$\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{air} \to \mathrm{véhicule}} = \rho_0 \cdot \mathrm{S_e} \cdot v_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

On projette suivant la direction verticale :

$$\mathrm{F}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{air} \to \mathrm{véhicule}} = -\rho_0 \cdot \mathrm{S_e} \cdot v_1^2 \cdot (\sin(\alpha) + \sin(\beta))$$

Quelles que soient les valeurs de α et β, la force plaque la voiture au sol, l'appui étant d'autant plus important que la vitesse est grande.