Espaces vectoriels normés

La notation $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des nombres réels, soit le corps des nombres complexes.

I Normes

1. Définitions et exemples

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **norme** sur E est une application N définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les trois axiomes suivants :

i. $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (axiome de séparation)

ii. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| \times N(x)$ (positive homogénéité)

iii. $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire)

Un **espace vectoriel normé** est un espace vectoriel E muni d'une norme.

Remarque(s) :

(I.1) Pour montrer que N définit une norme sur E, commencer par vérifier que E est un espace vectoriel, que N est définie sur E et que N est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

(I.2) $N(0) = N(0x) = 0 \times N(x) = 0$ donc l'axiome de séparation peut s'énoncer avec une équivalence.

(I.3) On a aussi $\forall (x, y) \in E^2, |N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y)$.

Exemple(s) :

(I.4) Si E est un espace préhilbertien réel alors $x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ est une norme sur E (norme euclidienne).

(I.5) $N_1 : A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \mapsto \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(I.6) $N_1 : P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|$ et $N : P \mapsto \int_0^{+\infty} |P(t)| e^{-t}\, \mathrm{d}t$ sont deux normes sur $\mathbb{K}[X]$.

(I.7) Soit F l'ensemble des fonctions <u>continues</u> et intégrables sur I ; l'application $f \mapsto \|f\|_1 = \int_I |f|$ est une norme sur F.

Définition : Soit (E, N) un espace vectoriel normé. L'application $d : (x, y) \in E^2 \mapsto N(y - x)$ est une **distance** sur E ie une application de E^2 dans $\mathbb{R}^+$ telle que

i. $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

ii. $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$.

iii. $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

Remarque(s) :

(I.8) Il existe des distances non associées à une norme : c/ex $d(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq y \\ 0 \text{ si } x = y \end{cases}$

Définition [I.1] : **(Normes usuelles sur $\mathbb{K}^p$)**
Soit $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$. On définit trois normes sur $\mathbb{K}^p$ en posant

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant p} |x_i|$$

Remarque(s) :

(I.9) Si E est un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, pour $x = x_1e_1 + \dots + x_pe_p$, on peut définir trois normes en posant $N_1(x) = \|(x_1, \dots, x_p)\|_1$, $N_2(x) = \|(x_1, \dots, x_p)\|_2$ et $N_\infty(x) = \|(x_1, \dots, x_p)\|_\infty$.

Définition [I.2] : Soient X un ensemble non vide et $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonction bornées sur X et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On définit une norme sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ en posant, pour $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

Remarque(s) :

(I.10) D'après le programme officiel, on peut utliser directement le résultat suivant : si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$ alors $\sup(kA) = k\sup(A)$ (éventuellement égaux à $+\infty$ si A n'est pas majorée).

2. Parties bornées

Définition : Soient $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E. On dit que A est **bornée** si

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall a \in A, \|a\| \leqslant M$$

Exemple(s) :

(I.11) Toute réunion de 2 parties bornées (ou d'un nombre fini de parties bornées) est bornée.

Définition : Soient $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé, X un ensemble non vide quelconque et $f : X \to E$. On dit que f **est bornée sur** X si $f(X)$ est une partie bornée de E, ie

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in X, \|f(x)\| \leqslant M$$

Remarque(s) :

(I.12) L'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ des applications bornées sur X et à valeurs dans E est un espace vectoriel sur lequel $f \longmapsto \sup\limits_{x\in X} \|f(x)\|$ est une norme.

Définition : Soient $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est bornée** si

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leqslant M$$

Remarque(s) :

(I.13) Cela signifie qu'une suite est bornée si et seulement si la partie $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E.

(I.14) L'ensemble des suites bornées de E est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$.

3. Normes équivalentes

Définition : Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes si

$$\exists(\alpha,\beta) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2, \forall x \in E, \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$$

Remarque(s) :

(I.15) Dans cette définition il est indispensable de préciser que $\alpha > 0$ (qui impliquera obligatoirement $\beta > 0$).

(I.16) On peut bien sûr intervertir N_1 et N_2 dans la définition précédente : on a, pour tout $x \in E$, $\frac{1}{\beta}N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant \frac{1}{\alpha}N_2(x)$.

(I.17) La relation d'équivalence des normes est transitive : si N_1 et N_2 sont équivalentes et si N_2 et N_3 sont équivalentes alors N_1 et N_3 sont équivalentes.

Exemple(s) :

(I.18) Vérifier que les normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes.

(I.19) Soit $E = \left\{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), f(0) = 0\right\}$. Montrer que $N_1 : f \mapsto \|f + f'\|_\infty$ et $\mathbb{N}_2 : f \mapsto \|f'\|_\infty$ sont deux normes équivalentes sur E. On pourra vérifier $f(x) = e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t(f(t) + f'(t))\,\mathrm{d}t$ si $f \in E$ et $x \in [0,1]$.

(I.20) Montrer que $f \mapsto \|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$ et $\| \|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Méthode : si N_1 et N_2 sont deux normes sur un espace vectoriel E.

- Pour montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes, on montre qu'il existe des constantes a et b telles que , pour tout $x \in E$, on ait

$$N_1(x) \leqslant aN_2(x) \quad \textbf{ET} \quad N_2(x) \leqslant bN_1(x)$$

  On a alors forcément $a > 0$ et $b > 0$ puis $\frac{1}{a}N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant bN_1(x)$.
- Pour montrer que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, on cherche une suite de vecteurs non nuls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} = +\infty \quad \textbf{OU} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} = +\infty$$

Propriété [I.3] : Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E. Si N_1 et N_2 sont équivalentes alors

1. si X est une partie de E,

X est bornée pour N_1 si et seulement si X est bornée pour N_2

2. si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^\mathbb{N}$ est une suite de vecteurs de E,

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour N_1 si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour N_2

Remarque(s) :

(I.21) On peut même vérifier que N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si toute partie X de E bornée pour N_1 et une partie bornée pour N_2, ie les parties bornées pour N_1 et N_2 sont exactement les mêmes.

Théorème [I.4] : (Équivalence des normes en dimension finie)
Si E est un espace vectoriel **de dimension finie** alors

toutes les normes sur E sont équivalentes.

Conséquence [I.5] : Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie p, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{i=1}^{p} u_i(n)e_i$. Alors

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si les p suites $(u_1(n))_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (u_p(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.

Remarque(s) :

I.22 Une suite de polynômes de $\mathbb{K}_p[X]$ est bornée si et seulement si les $p+1$ suites de ses coefficients sont bornées.

I.23 Une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est bornée si et seulement si les p^2 suites de ses coefficients sont bornées.

II Suites dans un espace vectoriel normé

1. Suites convergentes

Définition : Soient $(E, \| \, \|)$ un espace vectoriel normé, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E et $\ell \in E$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** ℓ (ou tend vers ℓ) si $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - \ell\| = 0$, ie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite dans E, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente**.
Dans le cas contraire, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **divergente**.

Remarque(s) :

II.1 La définition de limite dépend de la norme donc la nature et l'éventuelle limite d'une suite dépendent de la norme de E : si on considère la suite de polynômes définie par $P_n = \left(\frac{X}{2}\right)^n$ alors

a) (P_n) tend vers 0 pour $N_0 : P \mapsto |P(0)| + \int_0^1 |P'(t)| \, \mathrm{d}t$.

b) (P_n) tend vers 1 pour $N_2 : P \mapsto |P(2)| + \int_0^1 |P'(t)| \, \mathrm{d}t$.

c) (P_n) diverge pour $N_4 : P \mapsto |P(4)| + \int_0^1 |P'(t)| \, \mathrm{d}t$.

Propriété [II.1] : (Unicité de la limite)
Soit (u_n) une suite de $E^{\mathbb{N}}$ convergente. Le vecteur $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ est alors unique.

Remarque(s) :

II.2 Dans cette dernière propriété, on suppose évidemment que la norme sur E est fixée : la limite est donc unique pour une norme donnée sur E.

Exemple(s) :

II.3 Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ alors $A_n = A + \frac{1}{n} I_p$ tend vers A (quelle que soit la norme choisie sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$)

II.4 Toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices inversibles.

Propriété [II.2] : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E, espace vectoriel muni d'une norme $\| \, \|$, et $\ell \in E$.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors la suite réelle $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel $\|\ell\|$.

Remarque(s) :

(II.5) La réciproque de cette propriété est bien sûr fausse.

(II.6) On peut utiliser cette propriété par contraposée : si la suite réelle $(\|u_n\|)$ diverge alors la suite de vecteurs (u_n) diverge aussi.

Conséquence [II.3] : Soit (u_n) une suite de $E^{\mathbb{N}}$. Si (u_n) est convergente alors (u_n) est bornée.

Remarque(s) :

(II.7) Dans cette propriété, la norme est toujours la même : si (u_n) converge pour une norme N sur E alors la suite (u_n) est bornée pour cette même norme N.

Propriété [II.4] : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in E$. Toute suite extraite de (u_n) converge aussi vers ℓ.

Exemple(s) :

(II.8) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On suppose que la suite (A^n) converge vers $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Alors B est une matrice de projecteur.

Propriété [II.5] : Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E. Si N_1 et N_2 sont équivalentes alors

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour N_1 si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour N_2.

Remarque(s) :

(II.9) On peut aussi prouver que N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si toute suite convergente pour N_1 est aussi une suite convergente pour N_2.

(II.10) Cette propriété peut aussi servir à prouver que deux normes ne sont pas équivalentes : si on trouve une suite (u_n) qui converge pour N_1 et pas pour N_2 (ou qui convergent pour les deux normes mais pas vers la même limite) alors les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.
En étudiant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $f_n(t) = t^n$, montrer que $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Théorème [II.6] : Soient E un espace vectoriel **de dimension finie**, N_1 et N_2 deux normes sur E, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour N_1 si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour N_2

Remarque(s) :

(II.11) Cela signifie que, si E est de dimension finie, la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la valeur de sa limite (si elle existe) ne dépendent pas de la norme sur E que l'on choisit.

Conséquence [II.7] : Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie p, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{i=1}^{p} u_i(n)e_i$. Alors

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si les p suites $(u_1(n))_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (u_p(n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Dans ce cas, on a

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \sum_{i=1}^{p} \left(\lim_{n\to\infty} u_i(n)\right) e_i$$

Remarque(s) :

(II.12) Une suite de polynômes de $\mathbb{K}_p[X]$ converge si et seulement si les $p+1$ suites de ses coefficients convergent.

(II.13) Une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ converge si et seulement si les p^2 suites de ses coefficients convergent.

(II.14) Pour étudier une suite de vecteurs dans un espace vectoriel de dimension finie, il n'est pas nécessaire de préciser la norme à utiliser.

Exemple(s) :

(II.15) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$; étudier la nature des suites (A^n) et (S_n), où $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$.

(II.16) Pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on définit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour toute matrice A.

2. Propriétés des suites convergentes

Propriété [II.8] : (Linéarité de la limite)
Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé.

1. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites de $E^{\mathbb{N}}$ convergentes et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, alors la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)$ converge et

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} u_n + \beta \lim_{n\to\infty} v_n$$

2. L'ensemble des suites de $E^{\mathbb{N}}$ convergentes est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$ sur lequel l'application définie par $(u_n) \mapsto \lim_{n\to\infty} u_n$ est linéaire.

Attention : Ne pas écrire $\lim(\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \lim u_n + \beta \lim v_n$ *sans avoir vérifié (avant) que* (u_n) *et* (v_n) *sont convergentes.*

Propriété [II.9] : (Produit par une suite scalaire)
Soient $(E, \| \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, (u_n) une suite de $E^{\mathbb{N}}$ et (λ_n) une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si (u_n) et (λ_n) convergent alors $(\lambda_n u_n)$ converge et

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n u_n = \lim_{n\to\infty} \lambda_n \times \lim_{n\to\infty} u_n$$

Attention : Les produits et quotients de suites n'ont pas de sens pour deux suites à valeurs vectorielles, les limites infinies n'ont de sens que pour les suites à valeurs réelles.

Exemple(s) :

(II.17) Soient $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui convergent respectivement vers L_A et L_B.
Montrer que la suite $(A_k B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $L_A L_B$.
En déduire que si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k est inversible et si la suite $(A_k^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ converge alors L_A est inversible et $\lim_{k\to+\infty} \left(A_k^{-1}\right) = L_A^{-1}$.

(II.18) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $2A^3 + A^2 - 2A - I_n = 0$. Justifier que A est diagonalisable puis que la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $U_k = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} A^j$ converge.
La suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est elle convergente ?

III Topologie des espaces vectoriels normés

1. Boules et sphères

Définition : Soient $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$. On définit
la **boule ouverte** de centre a et de rayon $r > 0$ par

$$B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$$

la **boule fermée** de centre a et de rayon $r \geqslant 0$ par

$$B_f(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leqslant r\}$$

le **sphère** de centre a et de rayon $r \geqslant 0$ par

$$S(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}$$

$B(0, 1)$ et $B_f(0, 1)$ sont les boules unités ouverte et fermée, $S(0, 1)$ la sphère unité.

Exemple(s) :

III.1 Dans $\mathbb{R}$ les boules fermées sont les segments.

III.2 Dans $\mathbb{R}^2$, représenter les boules unités pour les normes usuelles.

III.3 Toutes les boules sont bornées.

Remarque(s) :

III.4 Une partie A est bornée si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $A \subset B_f(0, M)$.

Définition : Soient $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé et C une partie de E. On dit que C est une partie **convexe** si

$$\forall (x, y) \in C^2, \forall t \in [0, 1] tx + (1 - t)y \in C$$

Remarque(s) :

III.5 Cela signifie que C est convexe si et seulement si pour tout couple (x, y) de vecteurs de C, le segment $[x, y]$ est inclus dans C.

Exemple(s) :

III.6 Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles de $\mathbb{R}$.

III.7 Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe (ie $\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1], f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$) si et seulement si $C = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R}, f(x) \leqslant y\}$ (l'épigraphe de f) est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Propriété [III.1] : Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé. Toutes les boules de E sont des parties convexes de E.

2. Parties fermées et ouvertes

Définition : Soit F une partie d'un espace vectoriel normé E. On dit que F est une **partie fermée** (ou un fermé) de E si

pour toute suite $(u_n) \in F^{\mathbb{N}}$ qui converge dans E on a $\lim\limits_{n \to \infty} u_n \in F$.

Attention : Cela ne veut pas dire que toute suite d'une partie fermée F converge mais que si elle converge alors sa limite est aussi dans F.

Exemple(s) :

III.8 Les intervalles fermés de $\mathbb{R}$ ($[a, b]$, $]-\infty, b]$ ou $[a, +\infty[$) sont des fermés de $\mathbb{R}$.

(*III.9*) $\emptyset$ et E sont des fermés de E.

(*III.10*) Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
En déduire que l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E est une partie fermée de $\mathcal{L}(E)$.

Propriété **[III.2] :** Soit E un espace vectoriel normé. Toute boule fermée de E et toute sphère de E sont des parties fermées de E.

Propriété **[III.3] :** Soit E un espace vectoriel normé.

1. Toute réunion finie de parties fermées de E est une partie fermée de E.

2. Toute intersection (quelconque) de parties fermées de E est une partie fermée de E.

Attention : Une réunion quelconque de parties fermées peut ne pas être fermée :
$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]=]-1,1[$ *n'est pas un fermé de* $\mathbb{R}$.

Exemple(s) :

(*III.11*) Toute partie finie de E est une partie fermée.

Définition : Soient E un espace vectoriel normé et U une partie de E. On dit que U est une **partie ouverte** (ou un ouvert) de E si son complémentaire (dans E) est une partie fermée de E.

Exemple(s) :

(*III.12*) Les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ ($]a,b[$, $]-\infty,b[$ ou $]a,+\infty[$) sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}$.

(*III.13*) $\emptyset$ et E sont des ouverts de E.

Attention : Il existe des parties ouvertes et fermées et des parties qui ne sont ni ouvertes ni fermées. Le contraire de A est ouverte n'est donc pas A est fermée !

Propriété **[III.4] :** Soit E un espace vectoriel normé. Toute boule ouverte de E est une partie ouverte de E.

Propriété **[III.5] :** Soit E un espace vectoriel normé.

1. Toute réunion (quelconque) de parties ouvertes de E est une partie ouverte de E.

2. Toute intersection finie de parties ouvertes de E est une partie ouverte de E.

Attention : Une intersection quelconque de parties ouvertes peut ne pas être ouverte : $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[=\{0\}$ *n'est pas un ouvert de* $\mathbb{R}$.

Propriété **[III.6] :** Soient E un espace vectoriel normé et U une partie de E. On a équivalence de :

$i)$ U est une partie ouverte de E.

$ii)$ $\forall a \in U, \exists r>0, B(a,r)\subset U$

Propriété [**III.7**] **:** Soient $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé, N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E. Alors les parties ouvertes (resp. fermées) de E pour la norme N_1 sont exactement les parties ouvertes (resp. fermées) pour la norme N_2.

Conséquence [**III.8**] **:** Si E est un espace de dimension finie et $A \subset E$, alors la nature topologique de A (ouverte ou fermée) ne dépend pas de la norme sur E choisie.

3. Adhérence et intérieur

Définition : Soient E un espace vectoriel normé, A une partie de E et $x_0 \in E$.

1. On dit que x_0 est **adhérent à** A si
$$\forall \varepsilon > 0, B(x_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$
On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A appelé **adhérence de** A

2. On dit que x_0 est **intérieur à** A si
$$\exists r > 0, B(x_0, r) \subset A$$
On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A, appelé **intérieur de** A

3. On dit que A est **dense** dans E si $\overline{A} = E$.

Remarque(s) :

III.14 On a $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$ (inclusions strictes en général)

III.15 La frontière de A, notée $\mathrm{Fr}(A)$, est l'ensemble des points de E qui sont adhérents à A mais que ne sont pas intérieurs à A : $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$

III.16 $\mathring{A}$ est une partie ouverte ; $\overline{A}$ et $\mathrm{Fr}(A)$ sont des parties fermées.

Exemple(s) :

III.17 Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, alors $\sup A$ est adhérent à A.

III.18 U est une partie ouverte si et seulement si $U = \mathring{U}$.

III.19 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

III.20 Toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices inversibles, ie $\overline{\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ donc $\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Propriété [**III.9**] **:** **(Caractérisation séquentielle des points adhérents)**
Soient A une partie d'un espace vectoriel normé E et $\ell \in E$. On a équivalence de :

i) ℓ est adhérent à A.

ii) Il existe une suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ de vecteurs de A telle que $\ell = \lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

Remarque(s) :

III.21 La propriété précédente signifie que F est fermée si et seulement si tout point adhérent à F appartient à F ie F est fermée si et seulement si $\overline{F} = F$.

Exemple(s) :

III.22 Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie alors tout sous-espace F de E est fermé. Si de plus $F \neq E$ alors $\mathring{F} = \emptyset$.

IV Applications continues

1. Limite et continuité ponctuelle

Définition : Soient $(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie de E, $f : A \to F$, a un point de E adhérent à A et $\ell \in F$. On dit que f **tend vers** ℓ **en** a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon$$

Remarque(s) :

IV.1 L'existence de la limite de f, et son éventuelle valeur, dépendent des normes utilisées sur E et F : si $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $\varphi : f \in E \mapsto f(0)$ alors $\lim\limits_{0} \varphi = 0$ pour la norme $\| \|_\infty$ sur E mais f n'a pas de limite en 0 pour $\| \|_1$.

IV.2 La notion de point a adhérent à A dépend aussi de la norme sur E.

Propriété [IV.1] : (Unicité de la limite)
Si f admet une limite en a alors elle est unique. On note alors cette limite $\lim\limits_{a} f$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Attention : Encore une fois, la limite d'une fonction en a dépend des normes sur E et F donc l'unicité de la limite signifie que le vecteur ℓ est unique (s'il existe) pour un couple de normes fixé.

Propriété [IV.2] : Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E, $f : A \to F$ et $a \in E$.

1. Si (N_E, N'_E) et (N_F, N'_F) sont deux couples de normes équivalentes sur E et F respectivement alors on a $\lim\limits_{a} f(f) = \ell$ pour les normes N_E, N_F si et seulement si $\lim\limits_{a} f = \ell$ pour les normes N'_E, N'_F.
2. Si E et F sont de dimensions finies alors la limite de f en a (et son existence) ne dépendent pas des normes sur E et F utilisées.

Propriété [IV.3] : (Caractérisation séquentielle de la limite)
Soient $f : A \to F$, a adhérent à A et $\ell \in F$. On a équivalence de :

i) f tend vers ℓ en a, ie $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

ii) Pour toute suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tendant vers a, on a $\lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) = \ell$.

Attention :

— *Pour montrer que f admet une limite en a, il ne faut donc pas choisir une suite tendant vers a mais considérer une suite quelconque tendant vers a. Si $f(x) = \sin(\pi x)$ et $a_n = n$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = 0$ alors que f n'a pas de limite en $+\infty$.*

— *Si par contre on sait que la limite de f en a existe (mais qu'on ne la connaît pas), on peut la déterminer en utilisant une suite tendant vers a (que l'on peut donc choisir cette fois). Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(a + \dfrac{1}{n} h\right) = l$ pour $h \in E$ par exemple.*

Remarque(s) :

IV.3 Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_0 \in E$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : E \to E$, si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue en ℓ alors ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Propriété **[IV.4] :** Soient $f : A \to F$, a adhérent à A, $\ell \in F$ et $\varphi : A \to \mathbb{R}$ telle que $\|f(x)-\ell\|_F \leqslant \varphi(x)$ au voisinage de a.

$$\text{Si } \lim_a \varphi = 0 \text{ alors } \lim_a f = \ell.$$

Exemple(s) :

(IV.4) $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^3}{x^2+|y|}$ tend vers 0 en $(0,0)$.

Définition **[IV.5] :** Soient $f : A \to F$, où A est une partie de E et a un point adhérent à A. On suppose que f admet une limite en a.

1. Si f est définie en a (ie $a \in A$), alors $\lim_a f = f(a)$. On dit que f est **continue en** a.
2. Si f n'est pas définie en a (ie $a \notin A$), on dit que f est **prolongeable par continuité en** a. La fonction $\tilde{f}$ définie sur $A \cup \{a\}$ par $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in A \\ \lim_a f \text{ si } x = a \end{cases}$ est continue en a.

Exemple(s) :

(IV.5) $f : (x,y) \mapsto \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|}$ est-elle prolongeable par continuité en $(0,0)$?

(IV.6) $g : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^2$ est continue en tout point $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition : (Limites infinies)

1. Soient $f : A \to \mathbb{R}$, où A est une partie d'un espace vectoriel normé E, et a un point de E adhérent à A.
   $\lim_a f = +\infty$ si $\forall K \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x-a\|_E < \eta \Rightarrow f(x) > K$.
   $\lim_a f = -\infty$ si $\forall K \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x-a\|_E < \eta \Rightarrow f(x) < K$.
2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, F un espace vectoriel normé, $f : I \to F$ et $\ell \in F$.
   Si I n'est pas majoré, $\lim_{+\infty} f = \ell$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x > K \Rightarrow \|f(x)-\ell\|_F < \varepsilon$.
   Si I n'est pas minoré, $\lim_{-\infty} f = \ell$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x < K \Rightarrow \|f(x)-\ell\|_F < \varepsilon$.

Remarque(s) :

(IV.7) Dans la suite, si I est un intervalle non majoré (resp. non minoré), on dira que $+\infty$ (resp. $-\infty$) est adhérent à I.

(IV.8) La caractérisation séquentielle de la limite est également valable si $a = \pm\infty$ (donc avec A un intervalle de $\mathbb{R}$ non borné) ou avec $\ell = \pm\infty$ (donc avec $F = \mathbb{R}$).

Exemple(s) :

(IV.9) Étudier $f_1 : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $f_2 : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f_3 : (x,y) \mapsto \dfrac{|x|^{3/2}y}{x^4+y^2}$ en $(0,0)$.

(IV.10) $f : (x,y) \mapsto \dfrac{(x+y)(x-y-2)}{\sqrt{x^2+y^2-2(x-y-1)}}$ se prolonge-t-elle par continuité en $(1,-1)$?

Propriété **[IV.6] :** Soient A une partie d'un espace vectoriel normé E, F un espace vectoriel normé de dimension finie p, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F, $f : A \to F$ et, pour $i \in [\![1,p]\!]$, les applications $f_i : A \to \mathbb{K}$ telles que $\forall x \in A, f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} f_i(x)e_i$. Si $\ell \in F$, on pose $\ell = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \ell_i e_i$. Alors on a

$$\lim_a f = b \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!], \lim_a f_i = \ell_i$$

Remarque(s) :

(IV.11) L'étude de $f : A \to F$, où $\dim F = p$, est équivalente à l'étude de p application de A dans $\mathbb{K}$.

Attention : *L'étude de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ n'est pas équivalente à l'étude des applications partielles $x \mapsto f(x,y)$ et $y \mapsto f(x,y)$; c/ex : $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.*

2. Propriétés des limites

Propriété [**IV.7**] **:** Si $f : A \to F$ admet une limite en a adhérent à A alors f est bornée au voisinage de a, ie

$$\exists r > 0, \exists K \in \mathbb{R}^+, \forall x \in A, \|x-a\|_E < r \Rightarrow \|f(x)\|_F \leqslant K.$$

Propriété [**IV.8**] **:** Soient $f : A \to F$, a adhérent à A et $\ell \in F$.

1. Si $\lim\limits_a f = \ell$ alors $\lim\limits_a \|f\|_F = \|\ell\|_F$.

2. Si f est continue en a alors $\|f\|_F$ est continue en a.

Propriété [**IV.9**] **: (Linéarité de la limite)**
Soient f et g définies de A dans F et a adhérent à A.

1. Si f et g admettent des limites (finies) en a alors pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$, $\alpha f + \beta g$ admet une limite en a et

$$\lim_a (\alpha f + \beta g) = \alpha \lim_a f + \beta \lim_a g$$

2. Si f et g sont continues en a alors pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$, $\alpha f + \beta g$ est continue en a.

Propriété [**IV.10**] **: (Composition des limites)**
Soient E, F et G des espaces vectoriels normés, A une partie de E et B une partie de F, $f : A \to F$ et $g : B \to G$ telles que $f(A) \subset B$.

1. On suppose que a est adhérent à A, que $b = \lim\limits_a f$ existe (finie ou non), que b est adhérent à B et $\lim\limits_b g$ existe (finie ou non). Alors $g \circ f$ admet une limite en a et $\lim\limits_a (g \circ f) = \lim\limits_b g$.

2. Si f est continue en a et si g continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

Propriété [**IV.11**] **: (Produit par une fonction scalaire)**
Soient $\lambda : A \to \mathbb{K}$, $f : A \to F$ et a adhérent à A.

1. Si λ et f admettent des limites (finies) en a alors λf admet une limite en a et $\lim\limits_a (\lambda f) = \lim\limits_a \lambda \times \lim\limits_a f$.

2. Si λ et f sont continues en a alors λf est continue en a.

Propriété [**IV.12**] **: (Cas des fonctions à valeurs scalaires)**
Soit $f : A \to \mathbb{K}$ et a adhérent à A.

1. Si f admet une limite (finie) non nulle en a alors f ne s'annule pas au voisinage de a, $\dfrac{1}{f}$ admet une limite en a et $\lim\limits_a \dfrac{1}{f} = \left(\lim\limits_a f\right)^{-1}$.

2. Si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$ alors $\dfrac{1}{f}$ est continue en a.

3. Applications continues

Définition : Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \to F$. On dit que f est **continue sur** A si f est continue en tout point de A.
On note $\mathcal{C}(A, F)$ l'ensemble des fonctions continues sur A et à valeurs dans F.

Définition : Soient $f : A \to F$, où A est une partie d'un espace vectoriel normé E, et $k \in \mathbb{R}^+$. On dit que f est **k-lipschitzienne** si

$$\forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k\|x - y\|_E$$

Remarque(s) :

(IV.12) La notion d'application lipschitzienne ne dépend pas des normes équivalentes sur E et F utilisées mais la valeur de la constante k dépend des normes (même si on les remplace par des normes équivalentes).

Exemple(s) :

(IV.13) L'application $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne.

(IV.14) Si A est une partie non vide de E et $x \in E$, on pose $d(x, A) = \inf\{\|x - a\|, a \in A\}$. L'application $d : x \in E \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

Propriété [IV.13] :

1. Si f et g sont lipschitziennes sur A alors pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, l'application $(\alpha f + \beta g)$ est lipschitzienne sur A.
2. Si f est lipschitzienne sur A, si g est lipschitzienne sur B et si $f(A) \subset B$ alors $g \circ f$ est lipschitzienne sur A.

Attention : Le produit de deux applications lipschitziennes n'est pas toujours une application lipschitzienne ; c/ex : $id_{\mathbb{R}}$ est 1-lipschitzienne mais $id_{\mathbb{R}}^2$ ne l'est pas.

Propriété [IV.14] : Si f est lipschitzienne sur A alors f est continue sur A.

Attention : La réciproque est fausse ; c/ex : $id_{\mathbb{R}}^2$.

Propriété [IV.15] : (Opérations sur les fonctions continues à valeurs vectorielles)

1. Si $(f, g) \in \mathcal{C}(A, F)^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ alors $\alpha f + \beta g \in \mathcal{C}(A, F)$.
   Ainsi $\mathcal{C}(A, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, F)$.
2. Si $f \in \mathcal{C}(A, F)$, si $g \in \mathcal{C}(B, G)$ et si $f(A) \subset B$ alors $g \circ f \in \mathcal{C}(A, G)$.
3. Si $f \in \mathcal{C}(A, F)$ et $B \subset A$ alors $f_{|_B} \in \mathcal{C}(B, F)$.
4. Si $f \in \mathcal{C}(A, F)$ alors $\|f\| \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$.

Exemple(s) :

(IV.15) Montrer que f définie par $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ -x^2 & \text{si } x^2 + y^2 \leqslant 1 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Propriété [IV.16] : Soient A une partie d'un espace vectoriel normé, F un espace vectoriel normé de dimension finie p et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. Si $f : A \to F$, on note $f_1, \ldots, f_p$ les applications coordonnées de A dans $\mathbb{K}$ définies par $\forall x \in A, f(x) = f_1(x)e_1 + \cdots + f_p(x)e_p$.

$$f \text{ est continue sur } A \text{ si et seulement si } f_1, \ldots, f_p \text{ sont continues sur } A$$

Propriété [IV.17] :

1. Si $\lambda \in \mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{C}(A, F)$ alors $\lambda f \in \mathcal{C}(A, F)$.
2. Si $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ est telle que $\forall x \in A, f(x) \neq 0$ alors $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{C}(A, F)$.

Théorème [IV.18] : **(Théorème des bornes atteintes)**
Soient E un espace vectoriel de **dimension finie**, K une partie non vide, fermée et bornée de E et $f : K \to \mathbb{R}$ (donc à valeurs dans $\mathbb{R}$).

Si f est continue sur K alors f est bornée sur K et atteint ses bornes
ie $\max\limits_K f$ et $\min\limits_K f$ existent.

Remarque(s) :

IV.16 Si E est de dimension finie et $f : K \to F$ est continue sur $K \subset E$, fermé borné et non vide, alors f est bornée sur K mais $\max\limits_K f$ et $\min\limits_K f$ n'existent pas ; par contre $\max\limits_K \|f\|_F$ et $\min\limits_K \|f\|_F$ existent.

IV.17 Une partie fermée et bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est dite *compacte*.

Exemple(s) :

IV.18 Si E est un espace vectoriel de dimension finie et $f : B_f(a,r) \to B_f(a,r)$ est telle que $\forall (x,y) \in B_f(a,r)^2, x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ alors f admet un unique point fixe dans $B_f(a,r)$.

IV.19 Soient E un espace vectoriel de dimension finie, A une partie fermée non vide de E. Pour tout x de E, il existe $a \in A$ tel que $d(x, A) = \|x - a\|$.

IV.20 Continuité des intégrales à paramètre dans le cas où l'intervalle d'intégration est un segment :

Si f est continue sur $I \times [a,b]$ ($J = [a,b]$ est un segment) alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^0$ sur I.

Propriété [IV.19] : **(Caractérisation de la continuité des applications linéaires)**
Soit f une application linéaire de E vers F. Alors

f est continue sur E si et seulement si $\exists k \geqslant 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$

Remarque(s) :

IV.21 La continuité d'une application linéaire dépend des normes sur E et F : la forme linéaire $\varphi : P \mapsto P(0)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}[X]$ pour $N_\infty : P = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} a_i X^i \mapsto \max_{0 \leqslant i \leqslant d} |a_i|$ mais pas pour $\|\ \|_1 : P \mapsto \displaystyle\int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t$.

Théorème [IV.20] : **(Continuité des applications linéaires en dimension finie)**
Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimensions finies.

Toute application linéaire de E vers F est lipschitzienne donc continue.

Exemple(s) :

IV.22 Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto AM$ est continue. On en déduit que si $\lim\limits_{k \to +\infty} M_k = L$ existe alors $\lim\limits_{k \to +\infty} AM_k = AL$.
Si $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto P^{-1}MP$ est continue. On en déduit que si $\lim\limits_{k \to +\infty} M_k = L$ existe alors $\lim\limits_{k \to +\infty} P^{-1}M_kP = P^{-1}LP$.

IV.23 De même, si (u_k) est une suite d'endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ qui converge vers v et si $x \in \mathbb{R}^n$ est fixé alors $\lim\limits_{k \to +\infty} u_k(x) = v(x)$.

(IV.24) Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on définit $N(f)$ par $N(f) = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$. L'application N est alors une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}(E)$, ie telle que : $\forall (f,g) \in \mathcal{L}(E)^2, N(f \circ g) \leqslant N(f)N(g)$.
De plus il existe un vecteur $x_0 \in E$, de norme 1, tel que $\|f(x_0)\| = N(f)$.

(IV.25) De même, si $\| \|$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$ (que l'on identifie à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$), alors $N(A) = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$ définit une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$.

Conséquence **[IV.21] :** Soit P une application polynômiale sur $\mathbb{K}^n$, ie de la forme

$$P : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=0}^{N} a_k x_1^{\alpha_{k,1}} x_2^{\alpha_{k,2}} \ldots x_n^{\alpha_{k,n}}$$

où $N \in \mathbb{N}$, $(a_0, \ldots, a_N) \in \mathbb{K}^{N+1}$ et les $\alpha_{i,j}$ sont des entiers naturels.

Alors P est continue sur $\mathbb{K}^n$.

Théorème **[IV.22] :** Soient $(p,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et E un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors,

si $f : (\mathbb{K}^n)^p \to E$ est p-linéaire alors f est continue sur $(\mathbb{K}^n)^p$.

Conséquence **[IV.23] :** L'application det : $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \mapsto \det(M)$ est continue sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Exemple(s) :

(IV.26) Les applications $(X,Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \mapsto XY$ et $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto X^2$ sont continues.

(IV.27) Si $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ qui converge vers M et si la suite $(A_p^{-1})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers N alors M est inversible et $M^{-1} = N$.

(IV.28) Si $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ alors $\mathcal{X}_{AB} = \mathcal{X}_{BA}$.

Propriété **[IV.24] :** Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ continue. Si A est une partie de F, on note $f^{-1}(A)$ l'image réciproque de A par f

$$f^{-1}(A) = \{x \in E, f(x) \in A\}$$

1. Si A est une partie fermée de F alors $f^{-1}(A)$ est une partie fermée de E.
2. Si A est une partie ouverte de F alors $f^{-1}(A)$ est une partie ouverte de E.

Attention :

1. *La notation $f^{-1}(A)$ ne signifie pas que f est bijective (donc l'application f^{-1} n'existe pas forcément).*
2. *Cette propriété est fausse pour les images directes de $A \subset E$ par f : on peut avoir A fermée (resp. ouverte) et $f(A)$ non fermée (resp. non ouverte).*

Conséquence **[IV.25] :** Soient E un espace vectoriel normé et $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue sur E.

1. L'ensemble $\{x \in E, f(x) > 0\}$ est une partie ouverte de E.
2. Les ensembles $\{x \in E, f(x) = 0\}$ et $\{x \in E, f(x) \geqslant 0\}$ sont des parties fermées de E.

Exemple(s) :

(IV.29) $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On en déduit en particulier qu'il existe $r > 0$ tel que si $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que $\|H\| < r$ alors $I_n + H$ est inversible.

IV.30 Montrer que $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 3xy < y^3 \text{ et } xy > 1\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

IV.31 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M_{k+1} = 2M_k - M_k A M_k$.

a) Trouver une relation entre $I_n - AM_{k+1}$ et $I_n - AM_k$.

b) Montrer que la norme $\|M\| = \left(\mathrm{Tr}(M^T M)\right)^{1/2}$ vérifie $\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \|MN\| \leqslant \|M\| \times \|N\|$ et en déduire que si M_0 est tel que $\|I_n - AM_0\| < 1$ alors la suite $(AM_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

c) En utilisant le fait que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert, montrer que A est inversible et que $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers A^{-1}.