TD20 : Variables aléatoires

Exercice 1 **(Mines-Ponts PC 2015)**
Une pièce amène pile avec la probabilité $p \in]0,1[$. On lance cette pièce une infinité de fois. On appelle « série » toute succession de lancers donnant le même côté de la pièce, succession interrompue par l'obtention de l'autre côté de la pièce. Soit X_1 (resp. X_2) la variable aléatoire discrète égale à la longueur de la première série (resp. celle de la deuxième). Ainsi, par exemple, si on a obtenu : PPPFFP etc... alors $X_1 = 3$ et $X_2 = 2$

1. a) Déterminer la loi de X_1.
indication : vu la suite, mieux vaut commencer directement par la loi du couple
b) Prouver que $E(X_1)$ existe, calculer $E(X_1)$ et vérifier $E(X_1) \geqslant 2$.

2. a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2)
b) En déduire la loi de X_2
c) Calculer $E(X_2)$ puis calculer $V(X_2)$

3. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 **(Mines-Ponts PSI 2015)**
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variables aléatoires discrètes indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$, $Y_n = U_n U_{n+1}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

1. Donner la loi de Y_n.

2. Pour quels (n, m) les variables Y_n et Y_m sont-elles indépendantes ?

3. Calculer $E(Y_n Y_m)$ et $E\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$.

4. Calculer $V(S_n)$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$

Exercice 3 **(Mines-Ponts PSI 2017)**

1. $N \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$; montrer que, pour $u \in \mathbb{R}$, e^{uN} admet une espérance et la calculer.

2. On pose $h(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$. Montrer que $\displaystyle\inf_{u>0} E\left(e^{u(N-(1+y)\lambda)}\right) = e^{-\lambda h(y)}$.

3. On fixe $y > 0$; montrer que $P(N \geqslant (1+y)\lambda) \leqslant e^{-\lambda h(y)}$.

Exercice 4 **(Mines-Ponts PSI 2015)**
Une urne contient n boules distinctes $B_1, \ldots, B_n$, que l'on tire successivement et avec remise. Soit Y_r la variable aléatoire discrète qui donne le rang du tirage au bout duquel $B_1, \ldots, B_r$ ont été tirées au moins une fois.

1. a) Déterminer la loi, l'espérance, la variance de Y_1.
b) Préciser $Y_r(\Omega)$. Que valent $P(Y_r = r)$ et $P(Y_r = r+1)$?
indication : dénombrement.

2. On fixe r. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on note W_i la variable aléatoire discrète représentant le nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, i boules distinctes parmi les boules $B_1, \ldots, B_r$ soient sorties (ainsi, $W_r = Y_r$). On pose $X_1 = W_1$ et $X_i = W_i - W_{i-1}$ si $i \geqslant 2$.
a) Déterminer la loi de X_i ainsi que son espérance.
indication : interpréter X_i.
b) En déduire l'espérance de Y_n. Trouver un équivalent de $E(Y_n)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 5 **(TPE-EIVP PSI 2015)**
Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \dfrac{k-1}{2^k}$.

1. Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} P(X = k) = 1$.

2. Donner la fonction génératrice de X. Quel est son rayon de convergence ?

3. X admet-elle une espérance finie ? Si oui, quelle est-elle ? Une variance ?

Exercice 6
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X. Déterminer la fonction génératrice de $2X$ et de $X + 1$.

Exercice 7 **(CCINP PSI 2019)**
X et Y sont 2 variables aléatoires discrètes indépendantes de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que $Z = 1 + X + Y \sim \mathscr{G}(p)$.

1. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer en fonction de p.
indication : utiliser le théorème de comparaison

2. Calculer $G_X(t)$ et en déduire la loi de X.