

I Suites scalaires

Exercice 1 [Solution]

Étudier les suites définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1. u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n^2} \quad ; \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2019} \sin(u_n)$$

$$2. \text{ (Suites homographiques) } u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n + 4} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{5u_n - 3}{u_n + 1}.$$

indication : si l'équation du second degré $f(x) = x$ admet deux solutions a et b poser $v_n = \frac{u_n - a}{u_n - b}$ (ou l'inverse...); si elle a une racine double a poser $v_n = \frac{1}{u_n - a}$ et déterminer l'expression de u_n en fonction de n et u_0 .

Exercice 2 (Mines-Ponts PSI 2006) [Solution]

Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{3}u_n^2$.

Exercice 3 (ENSEA MP 2007) [Solution]

Soit f une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que : $\exists k \in \left]0, \frac{1}{2}\right[, \forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, |f(x) - f(y)| \leq k(|f(x) - x| + |f(y) - y|)$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.
2. Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que (u_n) converge vers un point fixe de f .

indication : étudier la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$.

Exercice 4 (Mines-Ponts PC 2012) [Solution]

Soit (u_n) définie par $u_1 = \alpha > 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{n+1}$.

1. Montrer que les limites possibles de (u_n) sont 0, 1 et $+\infty$.
2. On note $E_L = \{\alpha > 0, L = \lim u_n\}$; montrer que E_0, E_1 et E_∞ sont des intervalles.
3. Montrer que $[1, +\infty[\subset E_\infty$ puis que E_∞ est un ouvert.

indication : pour la fin si $\alpha \in E_\infty$ alors $u_{n_0} > 1$ et u_{n_0} est une fonction continue de α .

II Normes

Exercice 5 [Solution]

Sur $E = \mathbb{R}^2$, montrer que $N_1 : (x, y) \mapsto \sup_{t \in [0, 1]} |tx + y|$ et $N_2 : (x, y) \mapsto \sup_{t \in [-1, 1]} |tx + y|$ sont des normes et dessiner leur boule unité fermée.

Exercice 6 [Solution]

1. Sur $E = \mathbb{R}^2$, montrer que $N : (x, y) \mapsto \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{x + ty}{1 + t^2} \right|$ définit une norme.

2. Dessiner la boule unité fermée.

indication : montrer que $N(x, y) \leq 1$ est équivalent au fait que deux polynômes de degré 2 sont de signe fixe.

Exercice 7 (CCINP PSI 2019) [Solution]

1. $N_0(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$, $N_1(f) = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| + \int_0^1 |f'(t)| dt$ et $N_2(f) = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| + \left| \int_0^1 f'(t) dt \right| + \left| \int_0^1 f''(t) dt \right|$ définissent-elles des normes sur $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$?

2. Montrer que $\forall f \in E, \exists c \in [0, 1], f(c) = \int_0^1 f(t) dt$.

3. Montrer que $\forall f \in E, N_0(f) \leq N_1(f)$; peut-il y avoir égalité pour $f \neq 0$?

4. Montrer qu'il n'existe aucun réel a tel que $\forall f \in E, N_1(f) \leq aN_0(f)$.

Exercice 8 (Centrale PC 2014) [Solution]

Soient E un espace vectoriel normé, A une partie non vide bornée de E et $\mathcal{L}$ l'ensemble des applications lipschitziennes de A dans E .

1. Montrer que si $f \in \mathcal{L}$ alors f est bornée.
2. Pour $f \in \mathcal{L}$, on note $c(f) = \inf\{k \in \mathbb{R}^+, \forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|\}$. Justifier l'existence de $c(f)$ et montrer que f est $c(f)$ -lipschitzienne.

3. Pour $f \in \mathcal{L}$ et $a \in A$, on note $\|f\|_a = \|f(a)\| + c(f)$. Montrer que $\|\cdot\|_a$ est une norme sur $\mathcal{L}$.
 Pour $b \in A$, trouver α tel que $\|\cdot\|_a \leq \alpha \|\cdot\|_b$.

Exercice 9 (Centrale PSI 2017) [Solution]

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\}$

- Montrer que $N(f) = \sup_{t \in [0, 1]} |f''(t) - 2f'(t) + f(t)|$ définit une norme sur E .
- Soit $h(t) = f(t)e^{-t}$ avec $f \in E$; montrer que $\forall t \in [0, 1], h(t) = \int_0^t (t-u)h''(u) du$.
- Trouver $a > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq aN(f)$ pour tout $f \in E$ et minimiser a .

Exercice 10 [Solution]

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = 0\}$

- Montrer que $N_1 : f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ est une norme sur E .
 Existe-t-il une constante C telle que $N_1 \leq C\|\cdot\|_\infty$? Même question pour $\|\cdot\|_\infty \leq CN_1$?
- Montrer que $N_2 : f \mapsto \|f + f'\|_\infty$ est une norme sur E . La comparer à $\|\cdot\|_\infty$.
- Comparer N_1 et N_2 .
indication : introduire l'équation différentielle $y' + y = g$ et calculer f en fonction de $f + f'$.

Exercice 11 (CCP PC 2007) [Solution]

$E = \mathbb{R}_n[X]$ est muni d'une norme notée $\|\cdot\|$, issue d'un produit scalaire.

- Montrer que $\forall (P, Q) \in E^2, \|P + Q\|^2 + \|P - Q\|^2 = 2(\|P\|^2 + \|Q\|^2)$ (identité du parallélogramme)
- Montrer que $\|P\|_a = \sum_{k=0}^n |P(a_k)|, a_0, a_1, \dots, a_n$ étant $n+1$ entiers distincts est une norme.
- Trouver P_i tel que $\forall (i, j), P_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
- Montrer qu'il existe α et β tels que pour tout polynôme P de E , on a $\alpha\|P\|_a \leq \|P\| \leq \beta\|P\|_a$.
 Peut-on avoir $\alpha = \beta = 1$?
- Montrer que $\|P\|'_a = \sqrt{\sum_{k=0}^n P(a_k)^2}$ est une norme sur E .
- Montrer qu'il existe γ et δ tels que pour tout polynôme P de E , on a $\gamma\|P\|'_a \leq \|P\| \leq \delta\|P\|'_a$.
 Peut-on avoir $\gamma = \delta = 1$?

Exercice 12 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

Pour $P = \sum_{k=0}^n p_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $N_\infty(P) = \sup_{t \in [0, 1]} |P(t)|$ et $\|P\| = \sum_{k=0}^n |p_k|$. On admettra que N_∞ et $\|\cdot\|$ sont des normes sur $\mathbb{R}_n[X]$ et on note $E_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \|P\| = 1\}$.

- On pose $a_n = \inf_{P \in E_n} N_\infty(P)$; calculer a_0 et a_1 puis montrer l'existence de a_n (on pourra utiliser la fonction id de $(\mathbb{R}_n[X], N_\infty)$ vers $(\mathbb{R}_n[X], \|\cdot\|)$) et que $a_n > 0$.
- Montrer que (a_n) est décroissante et converge vers 0.

Exercice 13 (Centrale PSI 2009) [Solution]

Soit $(F_1, \dots, F_p)$ une famille de sous-espaces d'un espace E normé de dimension finie n , vérifiant $F_1 \cap \dots \cap F_p = \{0\}$.

- Justifier que pour tout $m \in E, d(m, F_i) = \inf_{h \in F_i} \|m - h\|$ existe.
- Montrer que $N(m) = \sum_{i=1}^p d(m, F_i)$ est une norme sur E .

Exercice 14 [Solution]

Soit E l'ensemble des suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornées telles que $u_0 = 0$. On pose $N_\infty(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ et $N(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|u_{n+1} - u_n|}{2^n}$, pour $u \in E$.

- Montrer que N_∞ et N sont des normes sur E telles que $\forall u \in E, N(u) \leq 4N_\infty(u)$
- Montrer qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $N_\infty(u) \leq CN(u)$ pour toute suite u de E .

Exercice 15 [Solution]

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

- Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| = \|BA\|$.
- Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que deux matrices semblables aient toujours la même norme.
indication : utiliser que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices inversibles.

III Suites de vecteurs

Exercice 16 (Centrale PC 2008) [Solution]

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.

1. Montrer que la suite $X_0 = I_p$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = \frac{1}{2}(X_n + AX_n^{-1})$ est définie et que $X_n = PD_nP^{-1}$ avec D_n diagonale.
2. Montrer que (X_n) converge et que sa limite X vérifie $X^2 = A$. On la note $\sqrt{A}$.
3. Montrer que si A est symétrique alors $\sqrt{A}$ est symétrique.

Exercice 17 (CCP PSI 2018) [Solution]

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{O}(E)$.

1. Montrer que $\text{Im}(v)^\perp = \ker(v)$ où $v = u - id$.
2. Soit $a \in E$ et $x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u^k(a)$; montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge.

Exercice 18 [Solution]

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que la suite (u^n) soit bornée. (c'est une suite de $\mathcal{L}(E)$)

1. Soit $x_0 \in E$, montrer que la suite $(u^k(x_0))$ est bornée.
2. Soit $x \in \ker(u - id)^2$. Déterminer a_n et b_n tels que $u^n(x) = a_n u(x) + b_n x$ et en déduire que $\ker(u - id)^2 = \ker(u - id)$ puis $E = \ker(u - id) \oplus \text{Im}(u - id)$.
3. Pour $x_0 \in E$, on pose $x_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u^k(x_0)$. Montrer que la suite (x_n) converge.

Exercice 19 (EIVP PSI 2017) [Solution]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = \frac{1}{3}(A^2 + A + I_n)$. Etudier la suite (A^k) .

Caractériser géométriquement la matrice $P = \lim A^k$.

Exercice 20 (CCP MP 2017) [Solution]

Soit E un espace préhilbertien réel. On dit que (x_n) converge faiblement vers x si $\forall y \in E$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - x|y) = 0$.

1. Montrer que la limite faible est unique si elle existe.
2. Montrer que si (x_n) converge vers x (au sens habituel) alors (x_n) converge faiblement vers x .
3. Montrer que (x_n) converge vers x si et seulement si (x_n) converge faiblement vers x et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = \|x\|$.
4. Montrer qu'en dimension finie, ces deux modes de convergence sont équivalents.

Exercice 21 [Solution]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$ (rayon spectral de A).

On va montrer que pour toute norme de E , on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

1. Pour commencer, on considère la norme $\|A\|_\infty = \max_{(i,j)} |a_{i,j}|$.

Montrer que si T est triangulaire et que ses coefficients diagonaux valent 1 alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}} = 1$.
indication : écrire $T = I_n + N$ avec $N = T - I_n$ (nilpotente) et utiliser la formule du binôme.

2. Montrer que si B est telle que $\forall (i,j)$, $|a_{i,j}| \leq b_{i,j}$ alors $\|A^k\|_\infty \leq \|B^k\|_\infty$.

3. Conclure en trigonalisant $\frac{A}{\rho(A)}$ et la norme $\|\cdot\|_\infty$.

4. En déduire le résultat pour une norme $\|\cdot\|$ quelconque.

indication : commencer par justifier qu'il existe $a, b > 0$ tels que $a\|A^k\|_\infty \leq \|A^k\| \leq b\|A^k\|_\infty$ en commençant par vérifier que la suite $(\|A^k\|^{-1} A^k)$ est bornée.

Exercice 22 (CCP PSI 2009) [Solution]

Soit la matrice $M(a) = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $m_{i,j} = a_j$, où $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. On note $\alpha = \sum_{j=1}^n a_j$.

1. Calculer $M(a)M(b)$. Trouver le noyau et l'image de $M(a)$.
2. Trouver une CNS pour que $M(a)$ soit la matrice d'un projecteur.

3. Montrer que $\{M(a), a \in \mathbb{K}^n\}$ est un espace vectoriel stable par produit dont on donnera une base et la dimension.

4. Montrer que $\exp(M(a)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{M(a)^k}{k!}$ et l'exprimer en fonction de e^a et $M(a)$.

Exercice 23 (Centrale PSI 2014) [Solution]

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $r(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\}$ et on suppose $r(A) < 1$.

1. Montrer que si A possède une seule valeur propre alors la suite (A^p) converge vers 0.
indication : que vaut $(A - \lambda I_n)^n$?
2. Montrer que si A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ alors la suite (A^p) tend vers 0.
3. Soit $B \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $F : X \in \mathbb{R}^n \mapsto AX + B$ admet un unique point fixe L .
4. On pose $X_0 = B$ et $X_{p+1} = F(X_p)$. Montrer que (X_p) tend vers L si (A^p) tend vers 0.

Exercice 24 (Centrale PSI 2018) [Solution]

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positif telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$. On note $\alpha = \min_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}$.

Pour $X \in \mathbb{R}^n$ à coordonnées positives, on note $\max(X)$ et $\min(X)$ la plus grande et la plus petite des coordonnées de X .

1. Si $X \in \mathbb{R}^n$ est à coordonnées positives, montrer que $\min(AX) \geq \alpha \max(X)$.
2. Montrer que $\min(AX) \geq \alpha \max(X) + (1 - \alpha) \min(X)$ et $\max(AX) \leq \alpha \min(X) + (1 - \alpha) \max(X)$.
3. En déduire que la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer le rang de la matrice limite.

Exercice 25 (Centrale PSI 2019) [Solution]

Soient $\theta_1, \dots, \theta_p$ des réels de $[0, 2\pi[$ deux à deux distincts et $m_1, \dots, m_p$ des entiers non tous nuls. On veut démontrer que la suite $(m_1 e^{in\theta_1} + \dots + m_p e^{in\theta_p})_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. On raisonne par l'absurde

1. Soit $M_n = \begin{pmatrix} e^{in\theta_1} & \dots & e^{in\theta_p} \\ e^{2in\theta_1} & \dots & e^{2in\theta_p} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{ipn\theta_1} & \dots & e^{ipn\theta_p} \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_p \end{pmatrix}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n Y = 0$.
2. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite extraite $(M_{\varphi(n)})$ de (M_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |\det(M_{\varphi(n)})| > \varepsilon$.
indication : il s'agit de montrer que $\det(M_n)$ ne tend pas vers 0. Faire apparaître un déterminant de Vandermonde puis montrer que si $x \in]0, \pi[$ alors $(\sin(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 (par l'absurde par exemple)
3. Conclure en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton

Exercice 26 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

1. Montrer que si (u_n) est une suite d'un espace vectoriel normé E de dimension finie telle que $\sum \|u_n\|$ converge alors $\sum u_n$ converge.
indication : quasi hors-programme ! Il s'agit de montrer que la suite des sommes partielles de la série CV ; commencer par le cas où la norme est $\|x\|_{\infty} = \max |\alpha_i|$ quand $x = \sum \alpha_i e_i$ avec (e_i) base de E et dans le cas général, prouver qu'il existe $C > 0$ telle que $\|x\|_{\infty} \leq C \|x\|$ pour tout $x \in E$.
2. Soit f une application k -lipschitzienne, avec $k < 1$. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 \in E$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge et en déduire que f admet un unique point fixe.

IV Topologie et densité

Exercice 27 [Solution]

Soient $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $E_p = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{rg}(A) \leq p\}$

1. Montrer que $A \in E_p$ si et seulement si tous les déterminants d'ordre $p+1$ extraits de A sont nuls.
2. En déduire que E_p est fermé.

Exercice 28 (Centrale PSI 2009) [Solution]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels croissante. Donner une CNS pour que $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ soit fermé.

indication : il peut être plus facile ici de traduire les propriétés avec des boules plutôt que des suites.

Exercice 29 [Solution]

Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

indication : trigonaliser et « perturber » les coefficients diagonaux pour obtenir des valeurs propres distinctes.

Exercice 30 (Mines-Ponts PSI 2008) [Solution]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ tel que $\|AX - B\| = \inf_{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \|AY - B\|$.

Exercice 31 (Centrale PSI 2014) [Solution]

1. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on note Ω_P l'ensemble des complexes r tels que $P(X) + r$ soit à racines simples dans $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{C} \setminus \Omega_P$ est fini.
2. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on note Θ_P l'ensemble des réels r tels que $P(X) + r$ soit scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$.
 - a) Montrer que Θ_P est ouvert puis que c'est un intervalle.
indication : faire un dessin d'un polynôme à racines simples.
 - b) Déterminer les polynômes pour lesquels Θ_P n'est pas borné.

Exercice 32 (Centrale MP 2011) [Solution]

1. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux pour le produit scalaire $(A|B) = \text{Tr}({}^tAB)$.
2. On note E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ équidistantes de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{Tr}(M^2) = 0\}$
3. E est-il fermé? borné?
indication : pour non borné, il suffit de trouver une matrice non nulle dans E et d'utiliser la positive homogénéité.
4. Déterminer les points intérieurs de E .
indication : il n'y en a pas, utiliser $A_p = A + \frac{1}{p}I_n$ en supposant A intérieur à E .

V Applications continues

Exercice 33 [Solution]

1. Montrer que $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $g : (x, y) \mapsto \frac{\ln(1+xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ est prolongeable par continuité en $(0, 0)$.

Exercice 34 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

Soient E un espace vectoriel normé et deux vecteurs non nuls a et b de E . On pose $f(t) = \|a + tb\|$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. f est-elle continue, lipschitzienne?
2. Si elles existent, calculer $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t)$.
3. Montrer que $I = \{t \in \mathbb{R}, a + bt \in B(0, 1)\}$ est un intervalle ouvert ou vide.

Exercice 35 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

Soit E un evn et $f : x \in E \mapsto \frac{x}{1 + \|x\|}$.

1. Montrer que f induit une bijection de E sur $B(0, 1)$.
2. Montrer que f est lipschitzienne, que f^{-1} est continue mais non lipschitzienne.

Exercice 36 [Solution]

Soient E est un espace vectoriel de dimension finie, K une partie fermée et bornée de E et $f : K \rightarrow E$ telle que $f(K) \subset K$ et $\forall (x, y) \in K^2, x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.

En utilisant l'application $\varphi : x \in \mathbb{K} \mapsto \|f(x) - x\|$, montrer que f admet un unique point fixe dans K .

VI Applications linéaires

Exercice 37 [Solution]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\varphi_A : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ X & \longmapsto & AX \end{cases}$.

Déterminer une constante k telle que φ_A soit k -lipschitzienne pour $\varphi_A : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$ puis pour $\varphi_A : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, \|\cdot\|_\infty)$.

Déterminer les plus petites constantes possibles.

Exercice 38 (Centrale PSI 2018) [Solution]

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/6 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/3 \end{pmatrix}$. Déterminer les plus petites constantes $C > 0$ telles que $\forall X \in \mathbb{R}^3, \|AX\| \leq C\|X\|$ si la norme est $\|\cdot\|_1$, puis $\|\cdot\|_\infty$, puis $\|\cdot\|_2$.

Exercice 39 (Mines-Ponts MP 2002) [Solution]

1. Montrer que $N_k : P \mapsto \sum_{i=0}^k |P(i)|$ est une norme sur $\mathbb{R}_k[X]$.
2. Déterminer k telle que $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \\ P \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \\ X^2 P' \end{cases}$ soit k -lipschitzienne. Puis déterminer la plus petite constante k possible.

Exercice 40 [Solution]

On note $l^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles bornées, que l'on munit de la norme $\|(u_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

1. Montrer que les applications $T : (u_n) \mapsto (u_{n+1})$ et $\Delta : (u_n) \mapsto (u_{n+1} - u_n)$ sont continues.
2. Justifier l'existence et calculer $\sup_{u \in S(0,1)} \|T(u)\|_\infty$ et $\sup_{u \in S(0,1)} \|\Delta(u)\|_\infty$.

Exercice 41 [Solution]

On note $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et pour $\varphi \in E$, on définit $T : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto \int_0^1 \varphi(t)f(t) dt \end{cases}$

1. Montrer que T est continue sur $(E, \|\cdot\|_2)$ et calculer $\sup_{\|f\|_2=1} |T(f)|$.
2. Dans cette question, $\varphi = id_{[0,1]}$, montrer que T est continue sur $(E, \|\cdot\|_1)$ et calculer $\sup_{\|f\|_1=1} |T(f)|$.
3. On suppose $\varphi > 0$, montrer que T est continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et calculer $\sup_{\|f\|_\infty=1} |T(f)|$.
4. Si $\varphi \in E$ est quelconque, montrer que T est continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et calculer $\sup_{\|f\|_\infty=1} |T(f)|$.

indication : introduire $f_n(t) = \frac{\varphi(t)}{|\varphi(t)| + \frac{1}{n}}$.

Exercice 42 [Solution]

Sur $\mathbb{R}_n[X]$, on définit N_1 et N_2 par $N_1(P) = \sum_{k=0}^n |P^{(k)}(0)|$ et $N_2(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Trouver une constante k , indépendante de n telle que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], N_1(P') \leq k N_1(P)$.
3. Existe-t-il une constante k , indépendante de n telle que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], N_2(P') \leq k N_2(P)$?

Exercice 43 [Solution]

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, pour $f \in E$ et $x \in [0, 1]$, on pose $u(f)(x) = f(x) - f(0)$.

1. Montrer que $u : f \mapsto u(f)$ est continue pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et calculer $\sup_{\|f\|_\infty=1} \|u(f)\|_\infty$.
2. Montrer que u n'est pas continue pour $\|\cdot\|_1$.

Exercice 44 [Solution]

Soit p un projecteur non nul de E , euclidien.

1. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.
indication : calculer $\|p(x + ty)\|$ avec $t \in \mathbb{R}, x \in \ker(p)$ et $y \in \text{Im}(p)$.
2. En déduire que l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E est une partie fermée et bornée de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 45 [Solution]

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On pose, pour $f \in E$, $\varphi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E 1-lipschitzien. Existe-t-il f telle que $\|\varphi(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$?
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\varphi^n(f)$ à l'aide d'une intégrale de f et en déduire φ^n est $\frac{1}{n!}$ -lipschitzien.
indication : justifier que $\varphi^n(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et calculer $(\varphi^n(f))^{(k)}(0)$, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Exercice 46 (CCP MP 2012) [Solution]

On note $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et on définit $u : f \mapsto u(f)$ avec $u(f)(x) = \int_0^x t f(t) dt$.

1. u est-elle continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$? Calculer $M = \sup_{\|f\|_\infty=1} \|u(f)\|_1$
2. Mêmes questions pour u de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Solutions

Exercice 1 [sujet] 1. a) On pose $f(x) = x^2 - 2x + 2$; $f(\mathbb{R}) = [1, +\infty[$ et f est croissante sur cet intervalle donc $(u_n)_{n \geq 1}$ monotone; $f(x) - x = (x-1)(x-2)$ donc si $u_1 \in [1, 2]$, (u_n) décroît donc CV vers 1, si $u_1 = 2$ alors (u_n) est constante égale à 2 et si $u_1 > 2$, (u_n) est croissante donc DV vers $+\infty$.

b) $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$ décroît sur $[0, 2] = f(\mathbb{R})$ donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et bornées donc CV vers l_1 et l_2 ; $f \circ f(x) = x \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2) = 0$ donc $l_1 = l_2 = 1$ et (u_n) CV vers 1.

c) $\sin$ est 1-lip donc $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2018} |u_n - u_{n-1}| \leq \left(\frac{1}{2018}\right)^n |u_1 - u_0|$ donc $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est ACV et (u_n) CV vers l'unique solution de $x = 1 + \frac{1}{2018} \sin(x)$.

2. a) $x = \frac{2x-1}{x+4} \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$, on pose $v_n = \frac{1}{1+u_n}$ qui vérifie $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{3}$ donc (v_n) tend vers $+\infty$ et $u_n = \frac{1}{v_n} - 1$ tend vers -1 .

b) $x = \frac{5x-3}{x+1} \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$, on pose $v_n = \frac{u_n-1}{u_n-3}$ qui vérifie $v_{n+1} = 2v_n$ donc (v_n) tend vers $+\infty$ et $u_n = \frac{1-3v_n}{1-v_n}$ tend vers 3 sauf si $u_0 = 1$ et dans ce cas (u_n) est constante égale à 1.

Exercice 2 [sujet] On pose $f(x) = \frac{1}{3}(3-x^2)$; $[0, 1]$ est stable par f et f décroît sur cet intervalle donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et bornées donc CV vers l_1 et l_2 qui vérifient $f \circ f(x) = x$; on vérifie que $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 + 3x - 3 = 0$ puis $f \circ f(x) = x \Leftrightarrow (x^2 + 3x - 3)(x^2 - 3x + 6) = 0$ donc le seul point fixe de $f \circ f$ dans $[0, 1]$ est $x = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2} = l_1 = l_2$ et (u_n) CV vers cette valeur.

Exercice 3 [sujet] 1. Si $f(x) = x$ et $f(y) = y$ alors on a $|f(x) - f(y)| = |x - y| \leq 0$.

2. Avec $x = u_n$ et $y = u_{n-1}$, on obtient $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{k}{1-k} |u_n - u_{n-1}|$ donc $|u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{k}{1-k}\right)^n |u_1 - u_0|$ et $\frac{k}{1-k} < 1$ donc $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est ACV

Exercice 4 [sujet] 1. Si (u_n) CV vers l alors $l = l^2$ et comme $u_n \geq 0$ elle ne peut pas tendre vers $-\infty$.

2. Si $u_n(\alpha) \rightarrow l$ et $u_n(\beta) \rightarrow l$ et si $\alpha \leq \gamma \leq \beta$, par récurrence sur n , on prouve $u_n(\alpha) \leq u_n(\gamma) \leq u_n(\beta)$ donc par encadrement, on a $u_n(\gamma) \rightarrow l$ aussi donc les trois ensembles sont des intervalles.

3. Si $\alpha \geq 1$ alors par récurrence, on a $u_n \geq 1$ puis (u_n) croît et comme $u_1 > 1$ elle ne peut tendre ni vers 0, ni vers 1 donc elle DV vers $+\infty$.

Si $\alpha \in E_\infty$ alors il existe n_0 tel que $u_{n_0}(\alpha) \geq 2$ et comme on vérifie que $\alpha \mapsto u_{n_0}(\alpha)$ est continue, on a $u_{n_0}(x) > 1$ si x est proche de α ($|x - \alpha| < \eta$); la preuve précédente justifie ensuite que si $u_{n_0}(x) > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = +\infty$.

On a donc $] \alpha - \eta, \alpha + \eta[\subset E_\infty$ qui est donc ouvert.

Exercice 5 [sujet] $N_1(x, y)$ existe car $t \mapsto tx + y$ est continue sur le segment $[0, 1]$ donc bornée; si $N_1(x, y) = 0$ alors $\forall t \in [0, 1], tx + y = 0$ donc $\begin{cases} y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$; $|t\lambda x + \lambda y| = |\lambda| |tx + y| \leq |\lambda| N_1(x, y)$ donc $N_1(\lambda x, \lambda y) \leq |\lambda| N_1(x, y)$ et on termine classiquement; enfin $|t(x+x') + (y+y')| \leq N_1(x, y) + N_1(x', y')$ donnera l'inégalité triangulaire; on fait de même pour N_2 .

Comme $t \mapsto tx + y$ est monotone sur $[0, 1]$, $N_1(x, y) = \max\{|y|, |x+y|\}$; on a donc $N_1(x, y) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ -1 \leq x+y \leq 1 \end{cases}$

La boule unité fermée pour N_1 est donc le parallélogramme délimité par les 4 droites $y = \pm 1$ et $y = -x \pm 1$.

On trouve de même pour N_2 le carré délimité par les 4 droites $y = x \pm 1$ et $y = -x \pm 1$.

Exercice 6 [sujet] 1. $t \mapsto \frac{x+ty}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 en $\pm\infty$ donc est bornée et $N(x, y)$ existe; si

$N(x, y) = 0$ alors $\forall t \in \mathbb{R}, x + ty = 0$ donc $x = y = 0$ (prendre $t = 0$ et $t = 1$ par ex); $\frac{|\lambda x + t\lambda y|}{1+t^2} \leq |\lambda| N(x, y)$

donne $N(\lambda x, \lambda y) \leq |\lambda| N(x, y)$ et on termine classiquement; enfin $\frac{|x+x'+t(y+y')|}{1+t^2} \leq N(x, y) + N(x', y')$ donnera l'inégalité triangulaire.

2. $N(x, y) \leq 1 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, |x+ty| \leq (1+t^2) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x+ty \leq 1+t^2 \\ x+ty \geq -1-t^2 \end{cases}$ Ces deux polynômes gardent un signe constant si et seulement si $\Delta_1 = y^2 + 4(1-x) \leq 0$ et $\Delta_2 = y^2 - 4(x+1) \leq 0$; la boule unité fermée est donc la portion de plan délimitée par les deux paraboles $x = 1 - \frac{y^2}{4}$ et $x = -1 + \frac{y^2}{4}$.

- Exercice 7** [sujet] 1. N_0 oui (cours), N_1 aussi car si $N_1(f) = 0$ alors $N_0(f') = 0$ donc $f' = 0$, f est constante donc nulle car $\int_0^1 f(t) dt$ est nulle aussi. Par contre N_2 n'est pas une norme car on peut trouver f non nulle telle que $N_2(f) = 0$ (un polynôme de degré 3 par exemple)
2. f est continue sur $[0, 1]$ donc $m = \min_{[0,1]} f$ et $M = \max_{[0,1]} f$ existe puis $m \leq \int_0^1 f(t) dt \leq M$ donc, d'après le TVI (f continue), $\int_0^1 f(t) dt$ est une valeur atteinte par f .
3. pour $t \in [0, 1]$, on a $f(t) = f(c) + \int_c^t f'(u) du$ donc $|f(t)| \leq |f(c)| + \int_0^1 |f'(u)| du$ et en intégrant cette inégalité sur $[0, 1]$, on obtient $N_0(f) \leq N_1(f)$. S'il y a égalité, il y a égalité dans toutes les inégalités précédentes : on en déduit que f est constante et on vérifie que seule la constante nulle est solution.
4. Si une telle constante a existait, avec $f(t) = t^n$, on a $N_0(f) = \frac{1}{n+1}$ et $N_1(f) = \frac{1}{n+1} + 1$ ce qui est absurde (quand n tend vers $+\infty$).

- Exercice 8** [sujet] 1. Soit $a \in A$ fixé, on a $\|f(x) - f(a)\| \leq k\|x - a\| \leq k(\|a\| + M)$ avec $A \subset B_f(0, M)$ donc $\|f(x)\| \leq \|f(a)\| + k(\|a\| + M)$ est bornée.
2. $\{k \in \mathbb{R}^+, \forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par 0 donc $c(f)$ existe. Il existe une suite (k_n) de $\{k \in \mathbb{R}^+, \forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|\}$ qui converge vers $c(f)$. Pour (x, y) , on a $|f(x) - f(y)| \leq k_n|x - y|$ qui donne $|f(x) - f(y)| \leq c(f)|x - y|$ quand $n \rightarrow +\infty$.
3. Si $\|f\|_a = 0$ alors $f(a) = 0$ et $c(f) = 0$ ce qui donne f constante puis nulle ; pour le reste, il suffit de prouver $c(\lambda f) = |\lambda|c(f)$ et $c(f+g) \leq c(f) + c(g) : \|\lambda f(x) - \lambda f(y)\| = |\lambda|\|f(x) - f(y)\| \leq |\lambda|c(f)\|x - y\|$ donne $c(\lambda f) \leq |\lambda|c(f)$ et on termine classiquement ; puis $\|f(x) + g(x) - f(y) - g(y)\| \leq (c(f) + c(g))\|x - y\|$ donne bien $c(f+g) \leq c(f) + c(g)$. On a $\|f(a) - f(b)\| \leq c(f)\|a - b\|$ donc $\|f(a)\| \leq \|f(b)\| + c(f)\|a - b\|$ ce qui donne ensuite $\|f\|_a \leq (1 + \|a - b\|)\|f\|_b$.

- Exercice 9** [sujet] 1. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que $N(f) = 0$ avec $f(0) = f'(0) = 0$ donne $f = 0$, le reste est facile.
2. h est $\mathcal{C}^2$, $h(0) = h'(0) = 0$ donc la formule de Taylor avec reste intégral donne l'égalité.
3. On a donc $|f(t)| \leq e^{-t} \int_0^t (t-u)(f''(u) - 2f'(u) + f(u))e^u du \leq N(f)e^{-t} \int_0^t (t-u)e^u du = N(f)(t-1+e^{-t})$ puis $\max_{t \in [0,1]} t-1+e^{-t} = e^{-1}$ donc $\|f\|_\infty \leq e^{-1}N(f)$; la constante est minimale puisqu'on a égalité avec $f : t \mapsto 1 + (t-1)e^{-t}$ (qui est bien dans E)

- Exercice 10** [sujet] 1. Facile en partant du fait que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme ; $\|f\|_\infty \leq N_1(f)$ mais l'autre inégalité est impossible puisque si $f_n(t) = \sin(nt) \in E$, on a $\|f_n\|_\infty \leq 1$ et $N_1(f_n) \geq n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$
2. Si $N_2(f) = 0$ alors $f + f' = 0$ avec $f(0) = 0$ donc $f = 0$ (Cauchy-Lipschitz), le reste est facile. On a $N_2(f_n) \geq 1 + n$ donc $N_2 \leq C\|\cdot\|_\infty$ est impossible ; pour l'autre sens, on vérifie que $f(x) = e^{-x} \int_0^x (f(t) + f'(t))e^t dt$ ce qui donne $|f(x)| \leq N_2(f)e^{-x} \int_0^x e^t dt$ donc $\|f\|_\infty \leq (1 - e^{-1})N_2(f)$
3. $N_2(f) \leq N_1(f)$ et $N_1(f) \leq 2\|f\|_\infty + N_2(f) \leq (3 + e^{-1})N_2(f)$

- Exercice 11** [sujet] 1. Vérifier $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$ et tout développer (cours espaces préhilbertiens)
2. Facile : si $\|P\|_a = 0$ alors les a_i sont $n+1$ racines distinctes de P
3. $P_i = L_i$ polynômes d'interpolation de Lagrange aux points (a_i) .

4. $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de E donc avec $P = \sum_{k=0}^n P(a_k)L_k$ alors $\|P\| \leq \sum_{k=0}^n |P(a_k)| \times \|L_k\| \leq \max_{0 \leq k \leq n} \|L_k\| \times \|P\|_a$.

De l'autre côté : on introduit $(P_0, \dots, P_n)$ une bon de E pour le produit scalaire associé à $\|\cdot\|$, on a, si $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k$,

$$\|P\|^2 = \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 \text{ et } \|P\|_a \leq \sum_{i=0}^n |\alpha_i| \times \|P_i\|_a \stackrel{\text{C-Sch}}{\leq} \|P\| \times \left(\sum_{i=0}^n \|P_i\|_a^2 \right)^{1/2} ; \text{ reste à prendre } \alpha = \left(\sum_{i=0}^n \|P_i\|_a^2 \right)^{-1/2}.$$

Si $\alpha = \beta = 1$ alors $\|\cdot\| = \|\cdot\|_a$ donc $\|\cdot\|_a$ vérifierait l'identité du parallélogramme ce qui est faux : $\|L_1 + L_2\|_a^2 = \|L_1 - L_2\|_a^2 = 4$ et $\|L_1\|_a^2 = \|L_2\|_a^2 = 1$

5. C'est la norme euclidienne associée au produit scalaire $(P|Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$ (pour lequel les L_i constituent une bon)

6. Si $P = \sum_{i=0}^n P(a_i)L_i$ alors $\|P\| \leq \sum_{i=0}^n |P(a_i)| \times \|L_i\| \stackrel{\text{C-Sch}}{\leq} \|P\|'_a \times \left(\sum_{i=0}^n \|L_i\|^2 \right)^{1/2}$; l'autre côté se traite comme dans 4.
Comme $\|\cdot\|'_a$ est associée à un produit scalaire, on peut avoir $\gamma = \delta = 1$ si $\|\cdot\| = \|\cdot\|'_a$.

Exercice 12 [sujet] 1. $E_0 = \{-1, +1\}$ donc $a_0 = 1$. $E_1 = \{\alpha X + \beta, |\alpha| + |\beta| = 1\}$ donc si $P \in E_1$, P est de degré ≤ 1 donc monotone sur $[0, 1]$ et $N_\infty(P) = \max\{|P(0)|, |P(1)|\}$. Quitte à remplacer P par $-P$, on peut supposer $\beta \geq 0$.
On a alors 3 cas : si $\alpha \geq 0$ alors $P(t) = \beta + (1-\beta)t$ et $N_\infty(P) = P(1) = 1$; si $\alpha < 0$ et $\beta \geq \frac{1}{3}$ alors $P(t) = \beta + (\beta-1)t$ et $N_\infty(P) = P(0) = \beta$ et enfin, si $\alpha < 0$ et $\beta < \frac{1}{3}$, $P(t) = \beta + (\beta-1)t$ et $N_\infty(P) = |P(1)| = 1 - 2\beta$. Dans les 3 cas, on a $N_\infty(P) \geq \frac{1}{3}$ et avec $P = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} - 1\right)t$, on a $N_\infty(P) = \frac{1}{3}$ donc $a_1 = \frac{1}{3}$.
 id est linéaire donc continue sur E_n qui est la sphère unité de $\mathbb{R}_n[X]$ pour la norme $\|\cdot\|$, donc une partie fermée bornée non vide; ainsi $N_\infty(id)$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$ et continue par composée) admet un minimum sur E_n donc a_n existe et comme c'est un minimum, on a $a_n = N_\infty(P)$ pour un $P \in E_n$; comme $P \neq 0$ et que N_∞ est une norme, on a $a_n > 0$.

2. Comme $E_n \subset E_{n+1}$, on a $a_{n+1} \leq a_n$. Si on pose $P_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k X^k$, on a $P_n \in E_n$ donc $N_\infty(P_n) \geq a_n$ et pour $x \in [0, 1]$, on a $|P_n(x)| = \frac{1}{n+1} \times \frac{1 - (-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} \leq \frac{1}{n+1}$ donc $N_\infty(P_n) \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 13 [sujet] 1. Fait en cours

2. Si $N(m) = 0$ alors $d(m, F_i) = 0$ pour tout i , ce qui donne $m \in \overline{F_i} = F_i$ car F_i est un sev de dimension finie donc est fermé. Reste à vérifier $d(\lambda m, F_i) = |\lambda|d(m, F_i)$ et $d(m+n, F_i) \leq d(m, F_i) + d(n, F_i)$: $d(\lambda m, F_i) \leq \|\lambda m - \lambda y\| = |\lambda| \|m - y\|$ donne la première inégalité et $d(n+m, F_i) \leq \|m+n - (y+z)\| \leq \|m - y\| + \|n - z\|$ la seconde.

Exercice 14 [sujet] 1. N_∞ est une norme sur E facile.

Si u est bornée alors $\frac{|u_{n+1} - u_n|}{2^n} \leq \frac{2\|u\|_\infty}{2^n}$ donc la série qui définit $N(u)$ CV et si $N(u) = 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$ ce qui donne $u = 0$ avec la condition $u_0 = 0$; le reste est facile.

On a aussi $N(u) \leq 2N_\infty(u) \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} = 4N_\infty(u)$

2. Si u est la suite telle que $u_k = \delta_{k,n}$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé (on a bien $u \in E$ si $n \geq 1$), on a $N_\infty(u) = 1$ et $N(u) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$. Si la constante C existait, on aurait $1 \leq C \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \right)$ pour tout $n \geq 1$ ce qui est absurde

Exercice 15 [sujet] 1. Si une telle norme existait, on aurait $\|E_{1,2}E_{2,2}\| = \|E_{2,2}E_{1,2}\|$ ce qui est absurde car $E_{1,2}E_{2,2} = E_{1,2} \neq 0$ et $E_{2,2}E_{1,2} = 0$.

2. Si une telle norme existait, comme AP et PA sont semblables pour toute matrice P inversible, on aurait $\|AP\| = \|PA\|$ pour tout P inversible puis si $B \in \mathcal{M}_n(K)$, il existe (P_k) suite de matrices inversibles tendant vers B ; par continuité de $M \mapsto AM$ et $M \mapsto MA$, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} AP_k = AB$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} P_k A = BA$ donc en faisant tendre k vers $+\infty$ dans l'égalité $\|AP_k\| = \|P_k A\|$, on obtient $\|AB\| = \|BA\|$ pour toutes matrices A et B .

Exercice 16 [sujet] 1. Par récurrence sur n

2. (D_n) vérifie $D_{n+1} = \frac{1}{2}(D_n + DD_n^{-1})$ donc les coefficients diagonaux de D_n vérifient une relation du type $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \alpha/u_n)$ où α est un coefficient diagonal de D . On a alors avec $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right)$, $f(\mathbb{R}^+) = [\sqrt{\alpha}, +\infty[$ est stable par f ; $f(x) - x = \frac{\alpha - x^2}{2x} \leq 0$ donc $(u_n)_{n \geq 1}$ décroît et CV vers l tel que $f(l) = l$ donc $l = \sqrt{\alpha}$. La suite (D_n) CV donc vers une matrice diagonale Δ dont les coefficients diagonaux sont les racines carrées de ceux de D ; on a donc $\Delta^2 = D$ puis $X^2 = A$.
3. Il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(\sqrt{\alpha_i}) = \alpha_i$ pour toutes les valeurs propres de A (il y en a au plus n), on a alors $\sqrt{A} = P(A)$ donc si A est symétrique, $\sqrt{A}$ aussi.

Exercice 17 [sujet] 1. si $a \in \ker(v)$ alors $(a|v(v)) = (a|u(b) - b) \stackrel{u(a)=a}{=} (u(a)|u(b)) - (a|b) = 0$ car u orthogonal; on trouve l'égalité par le théorème du rang

2. On écrit $a = a_0 + u(b) - b$ et on trouve $x_n = a_0 + \frac{1}{n}(u^{n+1}(b) - b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $\|u^{n+1}(b)\| = \|b\|$ (donc borné)

Exercice 18 [sujet] 1. On introduit une base $\mathcal{B}$ de E et on utilise sur $\mathcal{L}(E)$ la norme $N(u) = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$ si

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ et sur E la norme $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. On vérifie alors, si on note $a_{i,j}(k)$ les

coefficients de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^k)$, $\|u^k(x_0)\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j}(k)(x_0)_j \right| \leq n^2 N(u^k) \|x_0\|$ donc est bornée.

2. $u^n(x) = nu(x) + (1-n)x$ donc $\|u(x) - x\| = \frac{1}{n} \|u^n(x) - x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $(u^n(x))$ est bornée; on en déduit $\ker(u - id)^2 \subset \ker(u - id)$, réciproque facile. Si $y \in \ker(u - id) \cap \text{Im}(u - id)$ alors $y = u(x) - x$ et $x \in \ker(u - id)^2 = \ker(u - id)$ donc $y = (u - id)(x) = 0$; la somme est directe et le théorème du rang appliqué à $u - id$ permet de conclure.

3. On pose $x_0 = a + (u - id)(b)$ et on vérifie $x_n = a + \frac{1}{n}(u^{n+1}(b) - b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ puisque $(u_n(b))$ est bornée.

Exercice 19 [sujet] Le polynôme $3X^3 - Xp^2 - X - 1 = (X - 1)(X - r_1)(X - r_2)$ avec $r_i = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{3}$ annule A donc A est DZ : $A = QDQ^{-1}$ avec $D = \text{diag}(I_{n_1}, r_1 I_{n_2}, r_2 I_{n_3})$ comme $|r_i| < 1$, la suite (D_k) CV vers $\Delta = \text{diag}(I_{n_1}, 0I_{n_2}, 0I_{n_3})$ et (A^k) CV vers $P = Q\Delta Q^{-1}$ par continuité de $M \mapsto QMQ^{-1}$ (linéaire)
On vérifie que P est la matrice du projecteur sur $E_1(A)$ parallèlement à $E_{r_1}(A) \oplus E_{r_2}(A) = \text{Im}(A)$

Exercice 20 [sujet] 1. si (x_n) CV faiblement vers x et x' alors $(x - x'|y) = -(x - x_n|y) + (x_n - x'|y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $x - x' \in E^\perp$ donc $x = x'$.

2. par C-Sch, on a $|(x_n - x|y)| \leq \|x_n - x\| \times \|y\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

3. Si (x_n) CV faiblement vers x et $\lim \|x_n\| = \|x\|$ alors $\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - \|x\|^2 - 2(x_n - x|x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

4. Si (e_i) est une bon de E alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - x|e_i) = 0$ donc les coordonnées de x_n vérifient $x_n(i) = (x_n|e_i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (x|e_i) = x_i$ donc (x_n) CV vers x .

Exercice 21 [sujet] 1. On a $\mathcal{K}_T = (X - 1)^n$ donc C-Ham donne $N^n = 0$ donc N est bien nilpotente. On a alors

$T^k = \sum_{p=0}^{n-1} \binom{k}{p} T^p$ puis $\binom{k}{p} \leq k^p$ donc $1 \leq \|T^k\|_\infty \leq nk^p M$ avec $M = \max\{\|T^p\|_\infty, p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$ et comme $(nk^p M)^{1/k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$, on a la limite par encadrement.

2. On montre par récurrence sur k que $|a_{i,j}(k)| \leq b_{i,j}(k)$ (ce sont les coefficients des puissances $k^{\text{ème}}$)

3. $B = \frac{1}{\rho(A)} = PTP^{-1}$ avec $T = D + N$; on introduit $T' = I_n + N^+$ (avec N^+ la matrice de coefficients $|t_{i,j}|$) à laquelle on peut appliquer la première question. On a $|t_{i,j}| \leq t'_{i,j}$ et il existe un coefficient diagonal de T de module 1, on a donc $1 \leq \|T^k\|_\infty^{1/k} \leq \|T'^k\|_\infty^{1/k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$ donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|T^k\|_\infty = 1$.

On revient alors à A : les applications $M \mapsto PMP^{-1}$ et $M \mapsto P^{-1}MP$ sont linéaires donc lipschitziennes donc il existe α, β tels que $\alpha \|P^{-1}MP\|_\infty \leq \|M\|_\infty \leq \beta \|P^{-1}MP\|_\infty$ ce qui donne $\alpha^{1/k} \|T^k\|_\infty^{1/k} \leq \|B^k\|_\infty^{1/k} \leq \beta^{1/k} \|T^k\|_\infty^{1/k}$ puis $\lim \|B^k\|_\infty^{1/k} = 1$ et $\lim \|A\|_\infty^{1/k} = \rho(A)$

4. On choisit cette fois une norme $\|\cdot\|$ quelconque. La suite $\left(\frac{1}{\|A^k\|} A^k\right)$ est bornée pour la norme $\|\cdot\|$ donc aussi pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, il existe donc a tel que $\|A^k\|_\infty \leq a \|A^k\|$; de même (en échangeant les 2 normes) on prouve l'existence de b tel que $\|A^k\| \leq b \|A^k\|_\infty$; on en déduit $a^{-1/k} \|A^k\|_\infty^{1/k} \leq \|A^k\|^{1/k} \leq b^{1/k} \|A^k\|_\infty^{1/k}$ ce qui donne le résultat par encadrement

Exercice 22 [sujet] 1. $M(a)M(b) = \alpha M(b)$; si $a \neq 0$ alors $\text{rg}(M(a)) = 1$, $\ker(M(a)) = \{(x_i) \in \mathbb{R}^n, a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}$ et $\text{Im}(M(a)) = \text{Vect}\{a\}$

2. $\alpha = 1$

3. On a $M(a) = \sum_{j=1}^n a_j M_j$ où $M_j = \sum_{k=1}^n E_{k,j}$ donc $\{M(a), a \in \mathbb{K}^n\}$ est de dimension n

4. $M(a)^k = \alpha^k M(a)$ pour $k \geq 1$ donc $\exp(M(a)) = I_n + (e^\alpha - 1)M(a)$.

Exercice 23 [sujet] 1. $\mathcal{K}_A = (X - \lambda)^n$ donc C-Ham donne $(A - \lambda I_n)^n = 0$; on pose $N = A - \lambda I_n$ (nilpotente) et

on a, pour $k \geq n$, $A^k = (\lambda I_n + N)^k = \sum_{p=0}^{n-1} \binom{k}{p} \lambda^{k-p} N^p$ puis $\binom{k}{p} \leq k^p$ et $\|A^k\| \leq \sum_{p=0}^{n-1} k^p r(A)^{k-p} \|N^p\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$

(somme de n , fixé, suites tendant vers 0 puisque $r(A) < 1$).

2. $A = PDP^{-1}$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} D^k = 0$ et par continuité de $M \mapsto PMP^{-1}$, on a aussi $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$.
3. $F(X) = X \Leftrightarrow (A - I_n)X = -B$ qui admet une unique solution puisque $A - I_n$ est inversible car $1 \notin \text{Sp}(A)$.
4. On a $X_{p+1} - L = A(X_p - L)$ donc $X_p - L = A^p(B - L)$; par continuité de $M \mapsto M(B - L)$, on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} (A^p(B - L)) = (\lim_{p \rightarrow +\infty} A^p)(B - L) = 0$.

Exercice 24 [sujet] 1. Soit i tel que $(AX)_i = \min(AX)$, on a $(AX)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j \geq a_{i,j}x_j \geq \alpha x_j$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ donc $\min(AX) \geq \alpha \max(X)$.

2. Avec les mêmes notations, et si j est tel que $X_j = \max(X)$, on a $(AX)_i = a_{i,j}x_j + \sum_{k \neq j} a_{i,k}x_k \geq a_{i,j} \max(X) + \sum_{k \neq j} a_{k,i} \min(X) = a_{i,j} \max(X) + (1 - a_{i,j}) \min(X) = \min(X) + a_{i,j}(\max(X) - \min(X)) \geq \min(X) + \alpha(\max(X) - \min(X))$ qui donne le résultat. La deuxième inégalité se prouve de la même façon.

3. On note $u_p = \max(A^p X)$ et $v_p = \min(AX)$ et on vérifie que (u_p) et (v_p) sont adjacentes : on a $(AX)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j \leq \max(X) \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \max(X)$ ce qui donne $u_{p+1} \leq u_p$; on prouve de même que (v_p) est croissante. Puis $\max(AX) - \min(AX) \leq (1 - 2\alpha)(\max(X) - \min(X))$ avec les deux inégalités de la question précédente; on en déduit $0 \leq u_p - v_p \leq (1 - 2\alpha)^p(u_0 - v_0)$ donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} (u_p - v_p) = 0$ car $0 \leq 1 - 2\alpha < 1$ (car $\alpha \in]0, 1/2[$). On en déduit que (u_p) et (v_p) converge vers la même limite l .

En prenant $X = E_i$ un des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (qui est à coordonnées positives), tous les coeffs de la $i^{\text{ème}}$ colonne de A^p convergent donc vers la même limite l_i par encadrement (entre u_p et v_p); ainsi tous les coefficients de A^p convergent donc (A^p) converge vers L . De plus toutes les lignes de L sont égales d'après ce qui précède et sont non nulles car on conserve, par passage à la limite, $\sum_{j=1}^n l_{i,j} = 1$ (et $l_{i,j} \geq 0$) donc $\text{rg}(L) = 1$.

Exercice 25 [sujet] 1. On pose $u_n = m_1 e^{in\theta_1} + \dots + m_p e^{in\theta_p}$ et on a $(M_n Y)_k = u_{kn} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (suite extraite de (u_n))

2. $\det(M_n) = e^{in(\theta_1 + \dots + \theta_p)} \times V(e^{in\theta_1}, \dots, e^{in\theta_p})$ (factoriser par colonne) donc $|\det(M_n)| = \prod_{1 \leq h < k \leq p} 2 \left| \sin \frac{n(\theta_k - \theta_h)}{2} \right|$.

Il s'agit de prouver que $(\det(M_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 donc que aucune des suites $\left(\sin \frac{n(\theta_k - \theta_h)}{2} \right)$ ne tend vers 0 : on pose $x = \frac{|\theta_k - \theta_h|}{2} \in]0, \pi[$ et on suppose que $(\sin(nx))$ tend vers 0; on a alors $\sin(n+1)x = \sin(x) \cos(nx) + \cos(x) \sin(nx)$ et on en déduit $\sin(x) \cos(nx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ce qui est absurde car $\sin(x) \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^2(nx) = 1$ (car $\sin^2 + \cos^2 = 1$).

3. On a, avec C-Ham, $\mathcal{X}_{M_{\varphi(n)}}(M_{\varphi(n)})Y = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{\varphi(n)}^k Y = 0$ donc il reste (seul le terme constant donne une limite à priori non nulle) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^p \det(M_{\varphi(n)})Y = 0$ ce qui est absurde car si $m_k \neq 0$, la ligne k donnerait $m_k \det(M_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 26 [sujet] 1. Si on choisit la norme $\|\cdot\|_\infty$, la CV de la série $\sum \|u_n\|_\infty$ donne la CVA des séries $\sum u_n(i)$ où $u_n(i)$ est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de u_n . Comme une série absolument convergente est aussi CV, on en déduit que $\sum u_n(i)$ CV, ie toutes les coordonnées de la série de vecteurs $\sum u_n$ CV donc $\sum u_n$ CV aussi.

Si une telle constante C n'existait pas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existerait x_n tel que $\|x_n\|_\infty > n\|x_n\|$ (donc $x_n \neq 0$). Si on pose $y_n = \frac{x_n}{\sqrt{n}\|x_n\|}$, on a $\|y_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc (y_n) CV vers 0 pour la norme $\|\cdot\|$ alors que $\|y_n\|_\infty \geq \sqrt{n}$ donc (y_n) ne tend pas vers 0 pour $\|\cdot\|_\infty$ ce qui est absurde en dimension finie.

L'existence de la constante C permet de justifier que si $\sum \|u_n\|$ CV alors, par th de comparaison, $\sum \|u_n\|_\infty$ CV aussi et le premier cas permet de conclure.

2. On a $\|u_{n+1} - u_n\| = \|f(u_n) - f(u_{n-1})\| \leq k\|u_n - u_{n-1}\|$, ce qui donne $\|u_{n+1} - u_n\| \leq k^n \|u_1 - u_0\|$ donc $\sum \|u_{n+1} - u_n\|$ CV (car $k \in [0, 1[$) puis $\sum (u_{n+1} - u_n)$ CV d'après 1 et (u_n) CV par télescopage.

Si on note l la limite de (u_n) , f étant continue car lipschitzienne, on a $f(l) = l$. Si on suppose que l' est un point fixe de f , on a $\|l - l'\| = \|f(l) - f(l')\| \leq k\|l - l'\|$ donc $\|l - l'\| = 0$ car $k < 1$; le point fixe est donc unique.

Exercice 27 [sujet] 1. Si $\text{rg}(A) \leq p$ alors toute famille de $p+1$ colonnes de A est liée donc il existe une combinaison linéaire non triviale $\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i C_{j_i} = 0$ de ces colonnes; en tronquant les colonnes (enlever $n-p-1$ lignes) la combinaison

linéaire reste nulle donc les colonnes tronquées restent liées et le déterminant restant sera nul. Réciproquement, si $\text{rg}(A) \geq p+1$ il existe $p+1$ colonnes linéairement indépendantes $C_{j_1}, \dots, C_{j_{p+1}}$ donc $B = (C_{j_1} \dots C_{j_{p+1}})$ est de rang $p+1$, comme ${}^t B$, il existe donc $p+1$ colonnes de ${}^t B$ linéairement indépendantes ; en conservant ces colonnes, on obtient une matrice de $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{K})$ extraite de A et de rang $p+1$ donc un déterminant non nul.

2. Si Γ est l'ensemble des couples (I, J) où I et J sont des parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à $p+1$ éléments, on vient de prouver $E = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall (I, J) \in \Gamma, \det((a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}) = 0\}$ donc $E = \bigcup_{(I,J) \in \Gamma} \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det((a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}) = 0\}$.

Comme $A \mapsto (a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ est linéaire, elle est continue, tout comme le déterminant ; on en déduit que $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det((a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}) = 0\}$ est fermé donc E aussi.

Exercice 28 [sujet] On distingue si (u_n) converge ou non :

- Si (u_n) CV vers $l \in \mathbb{R}$ et si E est fermé alors $l \in E$ ce qui signifie qu'il existe un n_0 tel que $u_{n_0} = l$, la suite est alors stationnaire puisqu'elle est croissante ; réciproquement, si (u_n) est stationnaire alors $E = \{u_n, n \leq n_0\}$ est un ensemble fini donc fermé.
- Sinon, (u_n) tend vers $+\infty$ et si $a \notin E$ alors il existe n tel que $u_n < a < u_{n+1}$ et par croissance, on aura $a \in]u_n, u_{n+1}[\subset \mathbb{R} \setminus E$ donc E est fermé.

Exercice 29 [sujet] $A = PTP^{-1}$ et on pose T_k la matrice triangulaire dont tous les coefficients sont ceux de T sauf les coefficients diagonaux qui valent $t_{i,i} + \frac{1}{k}$; si k est assez grand, les coefficients diagonaux (donc les valeurs propres) de T_k sont 2 à 2 distinctes et T_k est DZ donc $B_k = PT_kP^{-1}$ aussi. Enfin $\lim_{k \rightarrow +\infty} T_k = T$ et par continuité de $M \mapsto PMP^{-1}$, on a $A = \lim_{k \rightarrow +\infty} B_k$.

Exercice 30 [sujet] Soit $d = \inf_{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \|AY - B\| = d(B, \text{Im}(A))$; $f : Z \mapsto \|Z - B\|$ est continue donc admet un minimum sur le fermé borné non vide $\text{Im}(A) \cap B_f(B, d+1)$ (car $\text{Im}(A)$ est un sev de dimension finie donc fermé) ; soit Z_0 réalisant ce minimum, comme $Z_0 \in \text{Im}(A)$, il existe X_0 tel que $Z_0 = AX_0$. Reste à vérifier que $\|AX_0 - B\| \leq \|AY - B\|$ pour tout Y : c'est déjà vérifié si $AY \in B_f(B, d+1)$ et si $AY \notin B_f(B, d+1)$ alors $\|AY - B\| > d+1 \geq \|AX_0 - B\|$.

Exercice 31 [sujet] 1. Soit r tel que $P(X) + r$ ait une racine multiple, on a alors $P(z) + r = P'(z) = 0$ donc z est une racine de P' qui possède un nombre fini de racines $z_1, \dots, z_k$ puis on a $r = -P(z_i)$ donc un nombre fini de valeurs de r .

- 2. a) (s'aider du tableau de variations pour comprendre) : soit r_0 tel que $P(X) + r_0$ soit SARS et $\varepsilon < \min\{|P(x) + r_0|, P'(x) = 0\}$ (qui existe car P' a un nombre fini de racines), ie inférieur à la plus courte distance entre l'axe des abscisses et les points du graphe à tangente horizontale. Alors pour $r \in]r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon[$, $P(X) + r$ reste SARS donc Θ_P est ouvert.
- b) Si $\deg(P) \geq 2$ alors Θ_P est borné : en translatant le graphe de P vers le haut ou vers le bas, on finira par obtenir un polynôme qui s'annule au plus 2 fois (si P est de degré pair ; une seule fois pour le degré impair) ; réciproquement, si $\deg(P) = 1$ alors $\Theta_P = \mathbb{R}$ n'est pas borné.

Exercice 32 [sujet] 1. Fait en cours

- 2. Comme la décomposition de M suivant cette somme directe est $M = \frac{1}{2}(M + {}^t M) + \frac{1}{2}(M - {}^t M)$, on a $d(M, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\|M - {}^t M\|$ et $d(M, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\|M + {}^t M\|$; en développant $\text{Tr}({}^t(M - {}^t M)(M - {}^t M)) = \text{Tr}({}^t(M + {}^t M)(M + {}^t M)) \Leftrightarrow \text{Tr}(M^2) = 0$.
- 3. $M \mapsto \text{Tr}(M^2)$ est continue (polynômiale) donc E est fermé. Par contre E n'est pas borné car $kE_{1,2}$ est dans E pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\|kE_{1,2}\| = k\|E_{1,2}\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$.
- 4. Si A est intérieur à E alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(A, \varepsilon) \subset E$ et si p est assez grand, on a $A_p \in B(A, \varepsilon)$ ce qui est absurde car $\text{Tr}(A_p^2) = 2p \text{Tr}(A) + np^2 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $A_p \notin E$ pour p grand.

Exercice 33 [sujet] 1. On a $\sin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u - \frac{u^3}{6} + o(u^3)$

Exercice 34 [sujet] 1. Par inégalité triangulaire, on a $|f(t) - f(t')| \leq \|(t - t')b\| = \|b\| \times |t - t'|$ donc f est lipschitzienne

- 2. Tjs par inégalité triangulaire, on a $f(t) \geq |t|\|b\| - \|a\|$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f = +\infty$ et $f(t) \geq \|a\| - |t|\|b\|$ donc $\lim_{t \rightarrow -\infty} f = +\infty$.
- 3. $t \in I \Leftrightarrow f(t) < 1$; si $I \neq \emptyset$ et $(t, t') \in I^2$, $\lambda \in]0, 1[$, on a $f(\lambda t + (1 - \lambda)t') = \|\lambda(a + tb) + (1 - \lambda)(a + t'b)\| \leq \lambda f(t) + (1 - \lambda)f(t') < \lambda + (1 - \lambda) = 1$ donc $\lambda t + (1 - \lambda)t' \in I$, I est donc un intervalle de $\mathbb{R}$. Comme f est continue, $I = \{t \in \mathbb{R}, f(t) < 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Exercice 35 [sujet] 1. $f(x) = y \Rightarrow \|y\| = \frac{\|x\|}{1 + \|x\|} < 1$ donc $f(x) \in B(0, 1)$ et $\|x\| = \frac{\|y\|}{1 - \|y\|}$ puis $x = \frac{y}{1 - \|y\|}$ donc f est injective ; on vérifie finalement que $f^{-1}(y) = \frac{y}{1 - \|y\|}$

$$2. \|f(x) - f(y)\| = \frac{\|(x - y) + \|y\|(x - y) + (\|y\| - \|x\|)y\|}{(1 + \|x\|)(1 + \|y\|)} \leq 2\|x - y\| + \frac{\|y\|}{(1 + \|y\|)}\|x - y\| \leq 3\|x - y\|.$$

Par quotient, f^{-1} est continue par quotient mais non lipschitzienne sinon elle serait bornée sur $B(0, 1)$ car $\|f^{-1}(x)\| \leq \|f^{-1}(0)\| + k\|x - 0\| \leq k$ ce qui n'est pas le cas

Exercice 36 [sujet] φ est continue donc admet un minimum en $\alpha \in K$; si $\varphi(\alpha) \neq 0$ alors $\varphi(f(\alpha)) < \varphi(\alpha)$ ce qui est absurde. Si on a un second point fixe en $\beta \neq \alpha$ alors $\|\alpha - \beta\| = \|f(\alpha) - f(\beta)\| < \|\alpha - \beta\|$ qui est absurde

Exercice 37 [sujet] 1. $|(AX)_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j|$ donc $\|AX\|_1 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}| |x_j| \leq \|X\|_1 \times \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$ avec égalité

pour X le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles sauf une, d'indice k tel que $\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| = \sum_{i=1}^n |a_{i,k}|$

$$2. |(AX)_i| \leq \|X\|_\infty \times \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \text{ avec égalité pour } X \text{ tel que } x_i = \frac{a_{k,j}}{|a_{k,j}|} \text{ si } a_{k,j} \neq 0, 1 \text{ sinon avec } k \text{ tel que}$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = \sum_{j=1}^n |a_{k,j}|$$

Exercice 38 [sujet] 1. Pour $\|\cdot\|_1$: si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors $AX = \begin{pmatrix} x + (y+z)/2 \\ \sqrt{3}(3y+z)/6 \\ z\sqrt{2/3} \end{pmatrix}$ donc $\|AX\|_1 = \left| x + \frac{1}{2}(y+z) \right| +$

$\frac{\sqrt{3}}{6}|3y+z| + \sqrt{\frac{2}{3}}|z| \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \sqrt{\frac{2}{3}} \right) (\|x\| + \|y\| + \|z\|)$; $C = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \sqrt{\frac{2}{3}}$ est la plus petite constante puisque l'égalité est atteinte pour $X = e_3$.

2. Pour $\|\cdot\|_\infty$, en majorant les valeurs absolues des 3 coordonnées de AX en fonction de $\|X\|_\infty$, on trouve $\|AX\|_\infty \leq 2\|X\|_\infty$, l'égalité est cette fois atteinte avec $X = (1, 1, 1)$

3. Pour $\|\cdot\|_2$: on a $\|AX\|_2^2 = {}^tX {}^tAAX$; on diagonalise ${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = P \text{diag}(1/2, 1/2, 2) {}^tP$ avec P

orthogonale. Comme P est orthogonale, on a $\|PX\|_2 = \|X\|_2$ donc $\|AX\|_2^2 = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) + 2\gamma^2$ si $PX = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

puis $\|AX\|_2^2 \leq 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 2\|X\|_2^2$. La plus petite constante est donc $C = \sqrt{2}$ puisque l'égalité est obtenue pour tout vecteur propre de tAA associé à la valeur propre 2.

Exercice 39 [sujet] 1. Si $N_k(P) = 0$ alors P possède $k+1$ racines distinctes donc $P = 0$; le reste est facile

2. On choisit la base $(X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2))$ dans $\mathbb{R}_2[X]$: si $P = aX(X-1) + bX(X-2) + c(X-1)(X-2)$ alors $N_2(P) = 2|a| + |b| + 2|c|$ puis $\varphi(P) = aX^2(2X-1) + bX^2(2X-2) + cX^2(2X-3)$ et $N_3(\varphi(P)) \leq 58|a| + 44|b| + 32|c| \leq 44N_2(P)$ avec égalité pour $P = X(X-2)$

Exercice 40 [sujet] T et Δ sont linéaires sur E .

1. On a $|u_{n+1}| \leq \|u\|_\infty$ donc $\|T(u)\| \leq \|u\|_\infty$ et T est continue.

De même, on a $|u_{n+1} - u_n| \leq 2\|u\|_\infty$ donc $\|\Delta(u)\|_\infty \leq 2\|u\|_\infty$ et Δ est continue.

2. On a déjà l'existence des deux bornes supérieures puisque T et Δ sont bornées sur $S(0, 1)$ d'après la question précédente. De plus $S_1 = \sup_{S(0,1)} \|T\|_\infty \leq 1$; si u est la suite constante égale à 1 (qui est dans $l^\infty(\mathbb{R})$), on a $\|u\|_\infty = 1$

et $\|T(u)\|_\infty = 1$ donc $S_1 = 1$ (et c'est en fait un maximum).

On a aussi $S_2 = \sup_{S(0,1)} \|\Delta\|_\infty \leq 2$ et cette fois, si $u_n = (-1)^n$ (qui est dans $l^\infty(\mathbb{R})$), on a $\|u\|_\infty = 1$ et $\|\Delta(u)\|_\infty = 2$

donc $S_2 = 2$ (et c'est aussi un maximum).

Exercice 41 [sujet] T est une forme linéaire sur E .

1. On a $|T(f)| \leq \sup_{\|f\|_2=1} \|f\|_2 \times \|f\|_2$ donc φ est continue sur $(E, \|\cdot\|_2)$ et $S_2 = \sup_{\|f\|_2=1} |T(f)| \leq \|\varphi\|_2$; avec $f = \frac{1}{\|\varphi\|_2} \varphi$,

si $\varphi \neq 0$, (qui est dans E), on a $\|f\|_2 = 1$ et $T(f) = \|\varphi\|_2$ donc $S_2 = \|\varphi\|_2$ (qui reste valable si $\varphi = 0$ puisque T serait nulle).

2. $|T(f)| \leq \int_0^1 t|f(t)| dt \leq \int_0^1 |f(t)| dt = \|f\|_1$ donc T est continue sur $(E, \|\cdot\|_1)$ et $S_1 \leq 1$; avec $f_n(t) = (n+1)t^n$, on a $\|f_n\|_1 = 1$ et $T(f) = \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $S_1 = 1$.
3. On a $|T(f)| \leq \|f\|_\infty \times \int_0^1 |\varphi(t)| dt$ donc T est continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et $S_\infty \leq \int_0^1 |\varphi(t)| dt$. Si on suppose $\varphi \geq 0$ alors, avec $f = 1$, on a $\|f\|_\infty = 1$ et $T(f) = \int_0^1 \varphi(t) dt$ donc $S_\infty = \int_0^1 \varphi(t) dt$.
4. La continuité reste valable et $S_\infty \leq \int_0^1 |\varphi(t)| dt$. Pour trouver une fonction de norme 1 telle que $|T(f)| = \int_0^1 |\varphi(t)| dt$, il faudrait prendre $f = \frac{\varphi}{|\varphi|}$ qui n'est pas continue (et même pas définie quand φ s'annule) donc on va « l'approcher » par $f_n(t) = \frac{\varphi(t)}{|\varphi(t)| + \frac{1}{n}}$ qui est bien dans E . On a ensuite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty = 1$ et on vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} T(f_n) = \int_0^1 |\varphi(t)| dt$ car $0 \leq \int_0^1 |\varphi(t)| dt - T(f_n) = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{|\varphi(t)|}{|\varphi(t)| + \frac{1}{n}} dt \leq \frac{1}{n}$. Si C est telle que $\forall f \in S_\infty(0, 1), |T(f)| \leq C$ alors, comme $\frac{1}{\|f_n\|_\infty} f_n \in S_\infty(0, 1)$, on a $\frac{1}{\|f_n\|_\infty} |T(f_n)| \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui donne, quand $n \rightarrow +\infty$, $\int_0^1 |\varphi(t)| dt \leq C$. On en déduit $S_\infty = \int_0^1 |\varphi(t)| dt$.

Exercice 42 [sujet] 1. Si $N_1(P) = 0$ alors 0 est racine d'ordre $\geq n+1$ donc $P = 0$ et si $N_2(P) = 0$ alors P est nul sur $[-1, 1]$ donc admet une infinité de racines et $P = 0$; le reste est facile

2. $N_1(P') = N_1(P) - |P(0)| \leq N_1(P)$
 3. $N_2(X^n) = 1$ alors que $N_2(nX^{n-1}) = n$ donc k n'existe pas.

Exercice 43 [sujet] u est linéaire.

1. On a $|u(f)(x)| \leq 2\|f\|_\infty$ donc $\|u(f)\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$ et u est continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$. De plus $S_\infty = \sup_{\|f\|_\infty=1} \|u(f)\|_\infty \leq 2$. Avec $f(x) = \cos(\pi x)$, on a $\|f\|_\infty = 1$ et $u(f)(1) = -2$ donc $\|u(f)\|_\infty \geq 2$ ce qui donne $S_\infty = 2$.
2. Si u était continue sur $(E, \|\cdot\|_1)$, il existerait une constante $C > 0$ telle que $\forall f \in E, \|u(f)\|_1 \leq C\|f\|_1$. Avec $f_n(t) = (1-t)^n$ ($n \geq 1$), qui est dans E , on a $\|u(f_n)\|_1 = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ce qui exclut l'existence de C .

Exercice 44 [sujet] 1. Si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$ alors $\|p(x+ty)\|^2 = t^2\|y\|^2$ et $\|x+ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t(x|y) + t^2\|y\|^2$ donc $0 \leq \|x\|^2 + 2t(x|y)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui impose $(x|y) = 0$ donc p est un projecteur orthogonal; la réciproque est l'inégalité de Bessel.

2. Si (p_n) est une suite de projecteurs orthogonaux qui CV vers p alors $p_n \circ p_n = p_n$ donne, quand n tend vers $+\infty$, $p \circ p = p$ (car $(u, v) \mapsto u \circ v$ est bilinéaire donc continue) et $\|p_n(x)\| \leq \|x\|$ donne $\|p(x)\| \leq \|x\|$ donc p est aussi un projecteur orthogonal.

Si (e_i) est une bon de E et p un projecteur orthogonal alors $\|p(e_i)\| \leq 1$ puis si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$, par C-Sch, on a $|a_{i,j}| = (p(e_j)|e_i) \leq 1$ donc $\|A\|_\infty \leq 1$

Exercice 45 [sujet] 1. $|\varphi(f)(x)| \leq \|f\|_\infty \times x \leq \|f\|_\infty$ et $\|\varphi(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$ pour $f = 1$.

2. On vérifie par récurrence que $\varphi^n(f)$ est $\mathcal{C}^n$ sur $[0, 1]$, $(\varphi^n(f))^{(k)}(0) = 0$ pour $k \leq n-1$ et $(\varphi^n(f))^{(n)} = f$ donc par formule de Taylor avec reste intégral, on a $\varphi^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt \leq \|f\|_\infty \frac{x^n}{n!}$ donc $\|\varphi^n(f)\|_\infty \leq \frac{1}{n!} \|f\|_\infty$ avec égalité pour $f = 1$.

Exercice 46 [sujet] 1. $|u(f)(x)| = \left| \int_0^x t f(t) dt \right| \leq \|f\|_\infty \int_0^x t dt = \|f\|_\infty \frac{x^2}{2}$ donc $\|u(f)\|_1 = \int_0^1 |u(f)(x)| dx \leq \|f\|_\infty \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{6} \|f\|_\infty$ donc u est continue et $M \leq \frac{1}{6}$. Pour $f = 1$, on a $\|f\|_\infty = 1$ et $u(f)(x) = \frac{x^2}{2}$ donc $\|u(f)\|_1 = \frac{1}{6}$ donc $M = \frac{1}{6}$ (et c'est en fait un maximum)

2. $|u(f)(x)| = \left| \int_0^x t f(t) dt \right| \leq x \int_0^x |f(t)| dt \leq \int_0^1 |f(t)| dt = \|f\|_1$ donc $\|u(f)\|_\infty \leq \|f\|_1$ donc u est aussi continue avec ces normes et $M = \sup_{\|f\|_1=1} \|u(f)\|_\infty \leq 1$. Si on pose $f_n(t) = t^n$, on a $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$ donc $\|(n+1)f_n\|_1 = 1$ et $u(f_n)(x) = \frac{x^{n+2}}{n+2}$ donc $\|u(f_n)\|_\infty = \frac{1}{n+2}$, on a donc $\|u((n+1)f_n)\|_\infty = \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $M = 1$ (et cette fois, on pourrait vérifier que ce n'est pas un maximum)