

Exercice 1

Pour $a \in [0, 1]$, et $f \in E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, on pose $\|f\|_a = |f(a)| + \|f'\|_\infty$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_a$ est une norme sur E .
2. Montrer que si $a, b \in [0, 1]$, $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sont équivalentes.

Exercice 2 (CCINP PSI 2019)

1. $N_0(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$, $N_1(f) = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| + \int_0^1 |f'(t)| dt$ et $N_2(f) = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| + \left| \int_0^1 f'(t) dt \right| + \left| \int_0^1 f''(t) dt \right|$ définissent-elles des normes sur $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$?
2. Montrer que $\forall f \in E, \exists c \in [0, 1], f(c) = \int_0^1 f(t) dt$.
indication : encadrer l'intégrale avec le théorème des bornes atteintes et utiliser le TVI.
3. Montrer que $\forall f \in E, N_0(f) \leq N_1(f)$; peut-il y avoir égalité pour $f \neq 0$?
4. Montrer que N_0 et N_1 ne sont pas équivalentes.

Exercice 3 (Mines-Ponts PSI 2007)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = \frac{1}{3}(A^2 + A + I_n)$.

1. Étudier suite (A^k) .
2. Caractériser géométriquement la matrice $P = \lim A^k$.
indication : vérifier que c'est la projection sur $\ker(A - I_n)$ parallèlement à $\text{Im}(A - I_n)$.

Exercice 4 (Centrale PC 2008)

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.

1. Étudier la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = \lambda > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \lambda u_n^{-1})$
2. Montrer que la suite $X_0 = I_p$ et $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = \frac{1}{2}(X_n + AX_n^{-1})$ est définie et que $X_n = PD_nP^{-1}$ avec D_n diagonale.
indication : par récurrence sur n , trouver l'expression de D_{n+1} en fonction de D_n .
3. Montrer que (D_n) converge vers une matrice Δ
4. Montrer que $N_P : A \mapsto \|PAP^{-1}\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si $\|\cdot\|$ est une autre norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
5. En déduire que (X_n) converge et que sa limite X vérifie $X^2 = A$.
6. Montrer que si on suppose A symétrique alors X est elle aussi symétrique.

Exercice 5

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que la suite (u^p) soit bornée. (c'est une suite de $\mathcal{L}(E)$)

1. Soit $x_0 \in E$, montrer que la suite $(u^k(x_0))$ est bornée.
indication : on peut représenter u par une matrice et on peut aussi choisir la base en fonction du vecteur x_0 .
2. Soit $x \in \ker(u - id)^2$. Déterminer a_n et b_n tels que $u^n(x) = a_n u(x) + b_n x$ et en déduire que $\ker(u - id)^2 = \ker(u - id)$ puis $E = \ker(u - id) \oplus \text{Im}(u - id)$.
indication : le plus rapide pour trouver a_n et b_n est d'utiliser la division euclidienne de X^n par $(X - 1)^2$; sinon, le faire par récurrence sur n pour trouver (a_{n+1}, b_{n+1}) en fonction de (a_n, b_n) .
3. Pour $x_0 \in E$, on pose $x_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u^k(x_0)$. Montrer que la suite (x_n) converge.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| = \|BA\|$.
indication : tester avec les $E_{i,j}$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que deux matrices semblables aient toujours la même norme.
indication : utiliser que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices inversibles.