TD22 : Applications dans les espaces vectoriels normés

Exercice 1 **(Centrale MP 2011)**

1. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux pour le produit scalaire $(A|B) = \operatorname{Tr}\left(A^T B\right)$.
2. On note E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ équidistantes de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que $E = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{Tr}\left(M^2\right) = 0\right\}$
   indication : les distances sont atteintes aux projetés orthogonaux sur les deux espaces et on peut déterminer ces projetés orthogonaux à partir de la décomposition de M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
3. E est-il fermé ? borné ?
   indication : pour non borné, il suffit de trouver une matrice non nulle dans E et d'utiliser la positive homogénéité.
4. Déterminer les points intérieurs de E.
   indication : il n'y en a pas, utiliser $A_p = A + \dfrac{1}{p} I_n$ en supposant A intérieur à E.

Exercice 2 **(Mines-Ponts PSI 2019)**
Soit E un evn et $f : x \in E \mapsto \dfrac{x}{1 + \|x\|}$.

1. Montrer que f induit une bijection de E sur $B(0,1)$.
   indication : trouver f^{-1} en résolvant $y = f(x)$ et en commençant par déterminer $\|x\|$ en fonction de y.
2. Montrer que f est lipschitzienne, que f^{-1} est continue mais non lipschitzienne.
   indication : vérifier que si f^{-1} était lipschitzienne, elle serait bornée sur $B(0,1)$.

Exercice 3
Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0,0)$?

$$f_1(x,y) = \frac{|x+y|}{x^2+y^2} \quad ; \quad f_2(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

$$f_3(x,y) = \frac{x^2+y^2-1}{x} \sin x \quad ; \quad f_4(x,y) = x^y$$

Exercice 4 **(Mines-Ponts PSI 2016)**
Soit $H(x,y) = \dfrac{x^4 y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq 0$ et $H(0,0) = 0$. H est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
indication : oui ; majorer différemment selon que $|y| \leqslant x^2$ ou $|y| \geqslant x^2$.

Exercice 5 **(Centrale PSI 2018)**
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/6 \\ 0 & 0 & \sqrt{2/3} \end{pmatrix}$. Déterminer les plus petites constantes $C > 0$ telles que $\forall X \in \mathbb{R}^3, \|AX\| \leqslant C\|X\|$ si la norme est $\| \|_1$, puis $\| \|_\infty$, puis $\| \|_2$.
indication : pour la norme $\| \|_2$, introduire $A^T A$ (qui est symétrique réelle).

Exercice 6 **(CCP MP 2012)**
On note $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et on définit $u : f \in E \mapsto u(f)$ avec $u(f)(x) = \displaystyle\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. u est-elle continue de $(E, \| \|_\infty)$ dans $(E, \| \|_1)$? Calculer $M = \displaystyle\sup_{\|f\|_\infty = 1} \|u(f)\|_1$
   indication : cette fois c'est un maximum
2. Mêmes questions pour u de $(E, \| \|_1)$ dans $(E, \| \|_\infty)$.
   indiction : ce n'est plus un maximum ; introduire $f_n(t) = t^n$ par exemple.