Fonctions de plusieurs variables

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ non vide.

Rappels sur la continuité : soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, a un point de U et $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^p$.

- f est continue en a si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in U, \|x - a\| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
- La continuité de f en a est indépendante de la norme que l'on choisit sur $\mathbb{R}^p$.
- Si f est lipschitzienne sur $B(a, r) \cap U$, pour $r > 0$ alors f est continue en a.
- Pour $h \in E$, l'application $\varphi_h : t \in \mathbb{R} \longmapsto f(a + th)$ est définie sur un intervalle $]-r, r[$ et si f est continue en a, l'application φ_h est continue en 0 pour tout $h \in E$.
- Si $g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}^p$ alors $U = \{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p, g(x_1, \ldots, x_p) > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Exemple(s) :

R.1 $f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longmapsto \dfrac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^2$.

R.2 $f_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longmapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ n'est pas prolongeable par continuité en $(0, 0)$.

R.3 $f_4 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longmapsto \dfrac{xy^2}{x^2 + y^6}$ n'est pas prolongeable par continuité en $(0, 0)$.

I Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

1. Dérivées partielles d'ordre 1 et classe $\mathcal{C}^1$

Définition : Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$ et $(e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

1. On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre** 1 d'indice i **au point** a si la fonction $t \mapsto f(a + te_i)$ est dérivable en 0.
Dans ce cas, on note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ (ou $\partial_i f(a)$) la $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle de f au point a, définie par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

2. Si f admet en tout point de U des dérivées partielles, on définit, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, les **applications dérivées partielles premières de** f par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \end{array}$$

Remarque(s) :

I.1 Si $a = (a_1, \ldots, a_p)$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est la dérivée en a_i de f_i, la $i^{\text{ème}}$ application partielle en a : $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f_i'(a_i)$ si $f_i : x_i \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_p)$.

I.2 Si elles existent, chaque application $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est une nouvelle application de p variables définie sur U.

Conséquence [I.1] : Si $f : U \longleftrightarrow \mathbb{R}$ est définie sur $U \subset \mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$ alors, si elle existent, les dérivées partielles premières de f en $(0,0)$ sont définies par

$$\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big[f(t,0) - f(0,0)\big]} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big[f(0,t) - f(0,0)\big]}$$

Exemple(s) :

(I.3) si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$ alors f admet en tout point a de $\mathbb{R}^p$ des dérivées partielles et $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f(e_i)$ (les dérivées partielles sont donc indépendantes du point a).

(I.4) $f : x \in \mathbb{R}^p \longmapsto \|x\|$ admet des dérivées partielles en tout point autre que 0, si $\| \ \|$ est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^p$.

(I.5) Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ symétrique et $f : X \in \mathbb{R}^p \mapsto \dfrac{1}{2}(AX|X)$. Montrer que f admet des dérivées partielles premières en tout point X_0 de $\mathbb{R}^p$ et les calculer.

Attention : L'existence de dérivées partielles n'implique pas la continuité ; c/ex : $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$ *et* $f(0,0) = 0$ *admet des dérivées partielles en* $(0,0)$ *mais* f *n'est pas continue en* $(0,0)$.

Définition : Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^1$ sur U** si

▷ f admet en tout point a de U des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$

et

▷ les p dérivées partielles de f, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : a \in U \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ sont continues sur U (pour tout $i \in [\![1,p]\!]$).

On note $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque(s) :

(I.6) Pour prouver la classe $\mathcal{C}^1$ d'une fonction de p variables, on doit donc prouver la continuité de p fonctions de p variables.

Exemple(s) :

(I.7) Montrer que $f : (x,y) \mapsto xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

(I.8) Toute application polynômiale est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.

(I.9) Toute application linéaire sur $\mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.

Théorème [I.2] : Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en tout point de U de la forme

1. Dans le cas général ($U \subset \mathbb{R}^p$) : avec $a \in U$ et $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \sum_{i=1}^{p} h_i \times \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + o(\|h\|)$$

2. Dans le cas de deux variables ($U \subset \mathbb{R}^2$) : avec $(x_0,y_0) \in U$ et $(h,k) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x_0+h, y_0+k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + o\big(\|(h,k\|\big)$$

Remarque(s) :

(I.10) La notation $g(h) \underset{h\to 0}{=} o(\|h\|)$ signifie $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{\|h\|} = 0$, ie $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \|h\| < r \Rightarrow |g(h)| < \varepsilon\|h\|$.

Conséquence [I.3] **:** Toute application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est continue sur U.

Définition [I.4] **:** Soient $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $a \in U$. On appelle **différentielle de** f **en** a la forme linéaire, notée $\mathrm{d}f(a)$ (ou $\mathrm{d}f_0$), définie par

1. Dans le cas général ($U \subset \mathbb{R}^p$) :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}f(a) : & \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (h_1, \dots, h_p) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} h_i \times \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \end{array}$$

L'image de $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$ par $\mathrm{d}f(a)$ est notée $\mathrm{d}f(a).h = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} h_i \times \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

2. Dans le cas de deux variables ($U \subset \mathbb{R}^2$) : avec $a = (x_0, y_0) \in U$

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{d}f(x_0, y_0).(h,k) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Exemple(s) :

(I.11) Si f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$ alors $\mathrm{d}f(a) = f$ pour tout $a \in \mathbb{R}^p$.

Conséquence [I.5] **:** Soient f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $a \in U$.

1. Les dérivées partielles de f sont $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \mathrm{d}f(a).e_i$, où e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

2. Le développement limité de f à l'ordre 1 en a s'écrit

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \mathrm{d}f(a).h + o(\|h\|)$$

Remarque(s) :

(I.12) $\mathrm{d}f(a)$ est la forme linéaire canoniquement associé à la matrice ligne $J_a(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$.

(I.13) $\mathrm{d}f(a)$ est en fait l'unique forme linéaire φ_a sur $\mathbb{R}^p$ telle que $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \varphi_a(h) + o(\|h\|)$.

2. Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Propriété [I.6] **:** Soient $(f,g) \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})^2$ et $a \in U$

1. Si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ alors $\alpha f + \beta g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et pour tout $a \in U$, on a $\dfrac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial x_i}(a) = \alpha\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \beta\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)$ donc, pour $h \in \mathbb{R}^p$,

$$\mathrm{d}(\alpha f + \beta g)(a).h = \alpha\, \mathrm{d}f(a).h + \beta\, \mathrm{d}g(a).h$$

En particulier $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$.

2. On a $fg \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, $\dfrac{\partial(fg)}{\partial x_i}(a) = f(a)\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a) + g(a)\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ donc, pour $h \in \mathbb{R}^p$,

$$\mathrm{d}(fg)(a).h = f(a) \times \mathrm{d}g(a).h + g(a) \times \mathrm{d}f(a).h$$

3. Si f ne s'annule pas sur U alors $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $\dfrac{\partial(1/f)}{\partial x_i}(a) = -\dfrac{1}{f(a)^2}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ donc, pour $h \in \mathbb{R}^p$,

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{f}\right)(a).h = -\frac{\mathrm{d}f(a).h}{f(a)^2}$$

Propriété [I.7] : **(Règle de la chaîne)**

1. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I (de $\mathbb{R}$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall t \in I, (\varphi_1(t), \dots, \varphi_p(t)) \in U$. Soit g l'application de I dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall t \in I, g(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_p(t)).$$
Alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et, pour tout $t \in I$,
$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{i=1}^{p} \varphi_i'(t) \times \partial_i f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_p(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \varphi_i'(t) \times \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_p(t)) \end{aligned}$$

2. Cas de deux variables : si $g(t) = f(\alpha(t), \beta(t))$ vérifie les hypothèses précédentes alors
$$\boldsymbol{\begin{aligned} \forall t \in I, g'(t) &= \alpha'(t) \times \partial_1 f(\alpha(t), \beta(t)) + \beta'(t) \times \partial_2 f(\alpha(t), \beta(t)) \\ &= \alpha'(t) \times \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha(t), \beta(t)) + \beta'(t) \times \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha(t), \beta(t)) \end{aligned}}$$

Remarque(s) :

(I.14) g représente la restriction de f le long de la courbe de $\mathbb{R}^p$ paramétrée par $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$, ie l'ensemble des points de $\mathbb{R}^p$ de la forme $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_p(t))$ avec $t \in I$.

Conséquence [I.8] : Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Alors f est constante sur U si et seulement si , pour tout a de U, $\mathrm{d}f(a) = 0$, ie si et seulement si
$$\forall a \in U, \forall i \in [\![1, p]\!]\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$$

Remarque(s) :

(I.15) rappel : C est convexe si $\forall (x, y) \in C^2, \forall t \in [0, 1], tx + (1 - t)y \in C$

Propriété [I.9] :

1. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, $x_1, \dots, x_p$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ telles que $\forall (u_1, \dots, u_n) \in V, (x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n)) \in U$.
Si on pose $g(u_1, \dots, u_n) = f(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n))$ alors f est $\mathcal{C}^1$ sur V et on a
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \partial_i g(u_1, \dots, u_n) = \sum_{k=1}^{p} \partial_i x_k(u_1, \dots, u_n) \times \partial_k f(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n))$$
$$\text{ou } \frac{\partial g}{\partial u_i}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial x_k}{\partial u_i}(u_1, \dots, u_n) \times \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n))$$

2. Cas de deux variables : si $g(u, v) = f(\alpha(u, v), \beta(u, v))$ vérifie les hypothèses précédentes alors
$$\boldsymbol{\begin{cases} \partial_1 g(u, v) = \partial_1 \alpha(u, v) \times \partial_1 f(\alpha(u, v), \beta(u, v)) + \partial_1 \beta(u, v) \times \partial_2 f(\alpha(u, v), \beta(u, v)) \\ \partial_2 g(u, v) = \partial_2 \alpha(u, v) \times \partial_1 f(\alpha(u, v), \beta(u, v)) + \partial_2 \beta(u, v) \times \partial_2 f(\alpha(u, v), \beta(u, v)) \end{cases}}$$
$$\text{ou } \boldsymbol{\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \dfrac{\partial \alpha}{\partial u}(u, v) \times \dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha(u, v), \beta(u, v)) + \dfrac{\partial \beta}{\partial u}(u, v) \times \dfrac{\partial f}{\partial y}(\alpha(u, v), \beta(u, v)) \\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \dfrac{\partial \alpha}{\partial v}(u, v) \times \dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha(u, v), \beta(u, v)) + \dfrac{\partial \beta}{\partial v}(u, v) \times \dfrac{\partial f}{\partial y}(\alpha(u, v), \beta(u, v)) \end{cases}}$$

Remarque(s) :

(I.16) Dans cette propriété, $\dfrac{\partial g}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \alpha}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \beta}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ désignent les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions g, α, β et f par rapport à leur première variable. On considère implicitement que la première variable de g, α et β s'appelle u alors que celle de f est notée x.

Exemple(s) :

(I.17) Soient f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et $g(x,y) = f\left(y^2 e^x, x\sin(y)\right)$. Calculer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

Conséquence [I.10] : (Cas des coordonnées polaires)
Soient $f : B(0,R) \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur la boule ouverte de centre 0 et de rayon R, et $g(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,R[\times\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\theta) &= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho,\theta) &= -\rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + \rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\end{aligned}$$

Remarque(s) :

(I.18) Ce changement de variable n'est pas bijectif (sur l'ensemble $]0,R[\times\mathbb{R}$) mais le devient si on se place sur $]0,R[\times]-\pi,\pi[$ par exemple.

(I.19) On peut inverser ce système et déterminer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g.

Exemple(s) :

(I.20) Trouver les fonctions f, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que $\dfrac{\partial f}{\partial x} + 2\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ en utilisant un changement de variable linéaire.

(I.21) Résoudre sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x} = x$ en utilisant les coordonnées polaires.

3. Vecteur gradient

Dans ce paragraphe, on note $(\,|\,)$ le produit scalaire cononique de $\mathbb{R}^p$.

Définition : Soient $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $a \in U$. On appelle **vecteur gradient de f au point a**, le vecteur de $\mathbb{R}^p$, noté $\nabla f(a)$, défini par

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right)$$

Propriété [I.11] : Soient $(f,g) \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})^2$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $a \in U$

$$\begin{aligned}\nabla(\alpha f + \beta g)(a) &= \alpha\nabla f(a) + \beta\nabla g(a)\\ \nabla(fg)(a) &= f(a)\times\nabla g(a) + g(a)\times\nabla f(a)\end{aligned}$$

Si f ne s'annule pas sur U alors

$$\nabla\left(\frac{1}{f}\right)(a) = -\frac{1}{f(a)^2}\times\nabla f(a)$$

Propriété [I.12] : Soient $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$, $a \in U$ et $h \in \mathbb{R}^p$. On a

$$\mathrm{d}f(a).h = (\nabla f(a)|h)$$

Remarque(s) :

(I.22) Le $\mathrm{DL}_1(a)$ de f peut s'écrire $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + (\nabla f(a)|h) + o(\|h\|)$.

(I.23) Le vecteur $\nabla f(a)$ est en fait l'unique vecteur u_a de $\mathbb{R}^p$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}^p$, $\mathrm{d}f(a).h = (u_a|h)$.

Exemple(s) :

(I.24) Déterminer l'expression du gradient en coordonnées polaires.

(I.25) Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ telle qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $a \in U, \|\nabla f(a)\| \leqslant k$. Montrer que f est k-lipschitzienne sur U (inégalité des accroissements finis).

II Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

1. Dérivées partielles secondes

Définition :

1. Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$ et $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$. On note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ (ou $\partial^2_{i,j} f(a)$), si elle existe, la dérivée partielle première par rapport à x_i de la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ au point a. Le réel $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ est appelé **dérivée partielle seconde de f par rapport à x_j puis x_i au point a.**
2. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U si les p^2 dérivées partielles secondes de f existent et sont continues sur U. On note $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et à valeurs réelles.

Remarque(s) :

(II.1) Lorsque $i = j$, on écrit $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ (ou $\partial_i^2 f$) au lieu de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a)$.

(II.2) f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U si et seulement si f admet des dérivées partielles premières de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Théorème [II.1] : (Théorème de Schwarz)
Si f est une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U **alors** pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Remarque(s) :

(II.3) Le théorème de Schwarz ne peut pas servir à montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^2$.

(II.4) Pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^p$, il existe donc au plus $\dfrac{p(p+1)}{2}$ dérivées partielles secondes différentes.

Exemple(s) :

(II.5) Montrer que $f : (x,y) \neq (0,0) \longmapsto xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ et $f(0,0) = 0$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

(II.6) Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y > 0\right\}$

a) Déterminer une condition nécessaire sur $g : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, telle que, si $V : (x,y) \in D \mapsto \left(\left(1+xy+x^2\right) g(x+y), \left(1+xy+y^2\right) g(x+y)\right)$, alors il existe $f : D \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur D vérifiant $V = \mathrm{grad}(f)$.

b) Vérifier que cette condition est suffisante et calculer f.

Propriété [II.2] :

1. $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$.
2. Si $(f,g) \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})^2$ alors $fg \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$.
3. Si $f \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ ne s'annule pas sur U alors $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$.

Exemple(s) :

(II.7) Soient f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et $g(x,y) = f(xe^y, x+y)$. Calculer les dérivées partielles secondes de g en fonction des dérivées partielles de f.

(II.8) Déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ (équation de propagation) en utilisant le changement de variables $(u,v) = (x+ct, x-ct)$

(II.9) Soient $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x \in \mathbb{R}^-\}$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. On pose, pour $(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times]-\pi,\pi[$, $g(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Calculer le laplacien de f, $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, en fonction des dérivées partielles de g.

Définition [II.3] : Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$. Si f est $\mathcal{C}^2$ sur U, on définit $H_f(a)$, la **matrice Hessienne** de f au point a, par

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$$

Propriété [II.4] : (Formule de Taylor-Young à l'ordre 2)
Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$. Si f est $\mathcal{C}^2$ sur U, alors

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \nabla f(a)^T h + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + o\left(\|h\|^2\right)$$

Remarque(s) :

(II.10) Si $h = (h_1, \ldots, h_p)$ alors

$$\nabla f(a)^T h = (\nabla f(a)|h) = \mathrm{d}f(a).h = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$$

$$\text{et} \quad h^T H_f(a) h = (H_f(a)h|h) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$$

2. Extrema

Définition : Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$. On dit que f admet en a
— un **maximum local** s'il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in B(a,r), f(x) \leqslant f(a)$.
— un **minimum local** s'il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in B(a,r), f(x) \geqslant f(a)$.
— un **extremum local** si f possède en a un maximum local ou un minimum local.
— un **maximum global** (ou absolu) si $\forall x \in U, f(x) \leqslant f(a)$.
— un **minimum global** (ou absolu) si $\forall x \in U, f(x) \geqslant f(a)$.
— un **extremum global** (ou absolu) si f possède en a un maximum global ou un minimum global.

Propriété [II.5] : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $a \in U$.

Si f admet un extremum local en a **alors** $\nabla f(a) = 0$, ie

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$$

Attention : Cette propriété est fausse sur un ensemble non ouvert ; c/ex : $x \mapsto \|x\|^2$ est constante sur $S(0,1)$ (donc extrémale en tout point) mais son gradient ne s'annule jamais.

Définition : Un point a pour lequel on a $\nabla f(a) = 0$ est appelé un **point critique de** f.

Propriété [II.6] : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$ un point critique de f.

- ▷ Si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ alors f admet en a un minimum local strict.
- ▷ Si $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^{+}(\mathbb{R})$ alors f n'a pas de minimum local en a.

Remarque(s) :

(II.11) Cette propriété s'adapte à l'étude des maximum locaux de f (en remplaçant f par $-f$) :

- ▷ Si $-H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ alors f admet en a un maximum local strict.
- ▷ Si $-H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^{+}(\mathbb{R})$ alors f n'a pas de maximum local en a.

Conséquence [II.7] : (Cas des fonctions de 2 variables) Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$ in point critique de f.

- ▷ Si $\det(H_f(a)) > 0$ et $\operatorname{Tr}(H_f(a)) > 0$ alors f admet un minimum local strict en a.
- ▷ Si $\det(H_f(a)) > 0$ et $\operatorname{Tr}(H_f(a)) < 0$ alors f admet un maximum local strict en a.
- ▷ Si $\det(H_f(a)) < 0$ alors f n'a pas d'extremum local en a.

Remarque(s) :

(II.12) On ne peut pas avoir $\det(H_f(a)) > 0$ et $\operatorname{Tr}(H_f(a)) = 0$

Exemple(s) :

(II.13) Déterminer les extremum sur $\mathbb{R}^2$ de $f : (x, y) \mapsto (x^2 + y)e^{-(x^2+y^2)}$.

(II.14) Soit $f : (x, y) \mapsto xy\ln(x^2 + y^2)$. Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer ses extrema locaux.

(II.15) Déterminer les extrema de $f(x, y) = xy\sqrt{1 - x - y}$ sur $T = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, x + y \leqslant 1\}$.

Attention : Si $\det(H_f(a)) = 0$, on ne peut pas conclure : $f(x, y) = x^2y + \ln(4 + y^2)$.

III Applications à la géométrie

1. Application aux courbes planes

Définition [III.1] : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et la courbe plane Γ définie par une équation implicite : $\Gamma = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 0\big\}$.

1. On dit qu'un point $M_0 = (x_0, y_0)$ de Γ est **régulier** si $\nabla f(M_0) \neq 0$.

2. La **tangente à Γ en** M_0 est alors la droite passant par M_0 et normale à $\nabla f(M_0)$.
Si $M_0 = (x_0, y_0)$, l'équation cartésienne de la tangente à Γ en M_0 est donc

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Exemple(s) :

(III.1) Déterminer l'équation de la tangente au cercle de centre $\Omega = (a, b)$ et de rayon $R > 0$ en un point de coordonnées (x_0, y_0).

Conséquence **[III.2] :** Soient $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \lambda\}$ (une ligne de niveau de f). Si $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}_\lambda$ est tel que $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ alors $\nabla f(x_0, y_0)$ est orthogonal à la ligne de niveau $\mathcal{C}_\lambda$ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

2. Application aux surfaces de $\mathbb{R}^3$

Définition : Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = 0\}$ une surface de $\mathbb{R}^3$, définie par une équation implicite.

1. Un point M_0 de S est **régulier** si $\nabla f(M_0) \neq 0$.
2. Si M_0 est régulier, le plan tangent à S en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ est le plan passant par M_0 et normal à $\nabla f(M_0)$. C'est donc le plan d'équation

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(M_0) = 0$$

Exemple(s) :

III.2 Déterminer l'équation du plan tangent à une sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz = d$.

Définition : Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et S la surface d'équation implicite $f(x, y, z) = 0$. Soient x, y et z trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I telles que $\forall t \in I, f(x(t), y(t), z(t)) = 0$. L'ensemble $\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)), t \in I\}$ est une **courbe de $\mathbb{R}^3$ tracée sur la surface** S.

Exemple(s) :

III.3 Soit g de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^2$ et S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = g(x, y)$. On appelle courbes coordonnées de S les courbes d'équations $\begin{cases} z = g(\alpha, y) \\ x = \alpha \end{cases}$ et $\begin{cases} z = g(x, \beta) \\ y = \beta \end{cases}$; ce sont les intersections de la surface S avec les plans parallèles aux plans (xOz) et (yOz).

Propriété **[III.3] :** Soient M_0 un point régulier d'une surface S définie par une équation implicite $f(x, y, z) = 0$ et Γ une courbe tracée sur S passant par M_0. La tangente à la courbe Γ au point M_0 est incluse dans le plan tangent à la surface S au point M_0.