# TD23 : Fonctions de plusieurs variables

---

**Exercice 1** **(CCINP PSI 2019)**
Soit $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

**1.** $f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$ ?

**2.** $f$ est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ ?

**3.** Étudier l'existence de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

*indication : en cas de problème, poser* $f_1(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *et il s'agir de calculer* $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}$.

**Exercice 2** **(ENSEA PSI 2021)**
Soit $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy^3-x^3y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

**1.** Montrer que $f$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

**2.** Montrer que $f$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

**3.** Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ ; $f$ est-elle $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ ?
*indication : la même que pour l'exercice précédent*

**Exercice 3** **(CCP PC 2011)**
Soit $E_a$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ telles que $\forall t > 0, \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(tx,ty,tz) = t^a f(x,y,z)$.

**1.** Montrer que $E_a$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^3\right)$.

**2.** Montrer que si $f \in E_a$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial x} \in E_{a-1}$.

**3.** Montrer que si $f \in E_0$ alors $f(x,y,z) = f(0,0,0)$. Que peut-on en déduire sur $E_0$ ?

**4.** Soit $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ telle que $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + z\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = af(x,y,z)$.
Montrer que $g : t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto f(tx,ty,tz) - t^a f(x,y,z)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et vérifie $tg'(t) = ag(t)$. En déduire que $f \in E_a$.
La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 4** **(CCINP PSI 2022)**
Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \partial_1 g(x,y) + \partial_2 g(x,y) = 0$. On pose $h(u,v) = g(\alpha u + \beta v, \beta u - \alpha v)$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.

**1.** Calculer $\partial_1 h(u,v)$

**2.** Trouver $(\alpha,\beta)$ tels que $h(u,v) = \varphi(v)$ avec $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

**3.** Déterminer $g$

**Exercice 5** **(Mines-Ponts PSI 2013)**
Résoudre $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} - f = -(x^2+y^2)$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x \in \mathbb{R}^-\}$ (on pourra passer en coordonnées polaires).

**Exercice 6** **(Mines-Ponts PSI 2019)**
Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ ; on pourra utiliser le changement de variable $u = x + ay$ et $v = x + by$
*indiction : toujours le même conseil que pour l'exercice 1, en cas de problème dans les calculs*

**Exercice 7** **(CCINP PSI 2018)**
$f : (x,y) \mapsto xy + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{y}$ admet-elle des extrema locaux sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ ?

**Exercice 8** **(CCP PSI 2017)**

**1.** Montrer que $f : (x,y) \mapsto x^3 + \ln(4+y^2)$ admet un unique point critique.

**2.** Déterminer un équivalent en 0 de $f(x,x^2) - f(0,0)$ ; $f$ admet-elle des extremums locaux ?

**Exercice 9** **(ENTPE-EIVP PSI 2015)**
Extrema de $f(x,y) = xy\sqrt{1-x-y}$ sur $T = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2, x+y \leqslant 1\}$ ?

**Exercice 10** **(CCP PSI 2013)**
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ autoadjoint défini positif.

1. Pour $u \in \mathbb{R}^n$, on définit $g$ par $g(x) = \dfrac{1}{2}(f(x)|x) - (u|x)$. Montrer que $g$ admet des dérivées partielles et les expliciter.
2. Montrer que $g$ admet un unique point critique et que ce point critique est un minimum global.
   *indication : les calculs sont plus faciles en posant $x = x_0 + h$ avec $x_0$ le point critique*

**Exercice 11**
Soit $S$ la surface d'équation $xy = z$ et $D$ la droite d'équation $\left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y - 2z + 3 = 0 \end{array} \right.$.

1. La surface $S$ est-elle régulière ?
2. Déterminer les points de $S$ en lesquels le plan tangent contient $D$.