Notations et conventions

- Dans ce problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
- On confond vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne correspondante, ce qui permet des écritures du type Ax où A est une matrice carrée réelle de taille n et x un élément de $\mathbb{R}^n$.
- Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et si x est un élément de $\mathbb{R}^n$, on note

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$$

ce qui, compte tenu de la convention précédente, s'écrit aussi

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

Si i et j sont deux entiers de $[\![1, n]\!]$, la j-ème dérivée partielle de f_i en x est notée $D_j f_i$ ou a $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$

- Le déterminant d'une matrice carrée A est noté $\det(A)$.
- Avec les notations précédentes, on appelle matrice jacobienne de f en x et on note J_f la matrice carrée réelle de taille n dont le terme situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne est $D_j f_i$,
- On appelle jacobien de f en x et on note $\mathrm{jac}_f(x)$, le déterminant $\det(J_f(x))$ de la matrice jacobienne $J_f(x)$.
- On appelle divergence de f en x et on note $\mathrm{div}_f(x)$, la trace de la matrice jacobienne $J_f(x)$. On a donc

$$\mathrm{div}_f(x) = \mathrm{Tr}(J_f(x)) = \sum_{i=1}^{n} D_i f_i(x)$$

Les quatre parties sont pour une large part indépendantes les unes des autres.

I Une interprétation du jacobien

I.A – Soit A une matrice carrée réelle de taille n et b un élément de $\mathbb{R}^n$. Soit f l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = Ax + b$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et préciser sa matrice jacobienne $J_f(x)$ en tout point x de $\mathbb{R}^n$.

I.B – Dans cette section, g désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
On fixe un élément $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = g(ta) = g(ta_1, ta_2, ..., ta_n)$$

I.B.1) Justifier que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t, donner $\varphi'(t)$.
I.B.2) En déduire qu'au voisinage de 0

$$g(ta) = g(0) + t(a_1 D_1 g(0) + a_2 D_2 g(0) + \cdots + a_n D_n g(0)) + o(t)$$

I.C – Dans cette section, f désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f(0) = 0$.
Pour t réel et j entier de $[\![1, n]\!]$, on note t_j l'élément $(0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)$ de $\mathbb{R}^n$, le réel t étant situé au rang j.
I.C.1) Justifier que si des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, alors la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\Phi(t) = \det(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$$

est continue sur $\mathbb{R}$.
En utilisant la question I.B.2 et la multilinéarité du déterminant, montrer qu'au voisinage de 0

$$\det(f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_n)) = t^n \mathrm{jac}_f(0) + o(t^n)$$

I.C.2) En déduire que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\det(f(t_1), \dots, f(t_n))}{\det(t_1, t_2, \dots, t_n)} = \mathrm{jac}_f(0)$$

I.C.3) Dans le cas $n = 2$ (respectivement $n = 3$), donner une interprétation géométrique de la valeur absolue du jacobien de f en 0 à l'aide d'aires de parallélogrammes(respectivement volumes de parallélépipèdes).

II Une interprétation de la divergence dans un cas particulier

On désigne par A une matrice réelle carrée de taille 2 et on pose, pour tout x dans $\mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax$.

II.A – Pour x dans $\mathbb{R}^2$, exprimer $\mathrm{div}_f(x)$ à l'aide de A seulement.
Pour a dans $\mathbb{R}^2$, on note $u_a(t)$ la solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy

$$X' = AX, \qquad X(0) = a$$

Autrement dit, u_a est l'unique fonction C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $u_a(0) = a$ et, pour tout réel t, $u_a'(t) = Au_a(t)$. *On admet l'existence et l'unicité d'une telle fonction.*

II.B –
Dans cette section et la suivante, on suppose A diagonale de la forme

$$A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

II.B.1) Que vaut $u_a(t)$?
II.B.2) Soit a et b deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et soit t un réel. Montrer que

$$det(u_a(t), u_b(t))) = \exp(t\mathrm{div}_f(a))det(u_a(0), u_b(0))$$

II.B.3) Utiliser le résultat précédent pour interpréter le signe de $\mathrm{div}_f(a)$ en termes de sens de variation de l'aire d'un certain parallélogramme comme fonction de t.

II.C – *Exemple* On suppose toujours que $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.
II.C.1) On pose $a = (a_1, a_2)$ et $u_a(t) = (x_1(t), x_2(t))$. On suppose que $\lambda_1 \neq 0$ et $a_1 > 0$. Déterminer une fonction θ_a telle que $x_2(t) = \theta_a(x_1)$ pour tout réel t.
II.C.2) Dans cette question, $a = (2, 1)$ et $b = (1, 2)$.
Pour chacun des cas suivants, illustrer sur une même figure les courbes représentatives des fonctions θ_a, θ_b et θ_{a+b} ainsi que les parallélogrammes de sommets $(0, 0)$, $u_a(t)$, $u_b(t)$ et $u_a(t)+u_b(t)$ pour $t = 0$ et une valeur de t strictement positive.

a) $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.
b) $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$.
c) $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.

II.D –
II.D.1) Reprendre les questions II.B.1 et II.B.2 dans le cas où A est triangulaire de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

II.D.2) Montrer que la relation

$$\det(u_a(t), u_b(t)) = \exp(t\mathrm{div}_f(a)) \det(u_a(0), u_b(0))$$

est valable lorsque la matrice A possède un polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{R}$.
II.D.3) Étendre ce résultat au cas d'une matrice réelle 2×2 quelconque.

III Matrice jacobienne symétrique, antisymétrique

Dans le début de cette partie f est une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Si x est un élément de $\mathbb{R}^n$, on note toujours

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

Si i, j et k sont trois entiers de $[\![1, n]\!]$, la dérivée partielle seconde de f_k en x par rapport aux variables x_i et x_j est notée $D_{i,j}f_k(x)$ ou $\dfrac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(x)$, ou encore $f_{i,j,k}(x)$.
III.A – Justifier que, pour tout x dans $\mathbb{R}^{*n}$ et tous i, j et k dans $[\![1, n]\!]$, on a $f_{i,j,k}(x) = f_{j,i,k}(x)$.

III.B– Dans cette section, on suppose que la matrice jacobienne J_f est antisymétrique pour tout x dans $\mathbb{R}^n$.
III.B.1) Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, et tous i, j et k dans $[\![1, n]\!]$, $f_{i,j,k}(x) = -f_{i,k,j}(x)$.
III.B.2) En déduire que, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ et tous i, j et k dans $[\![1, n]\!]$, on a $f_{i,j,k}(x) = 0$.

III.B.3) Montrer qu'il existe une matrice carrée réelle A de taille n et un élément b de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$.
Justifier que A est antisymétrique.
III.B.4) Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur f, la matrice jacobienne $J_f(x)$ est-elle antisymétrique pour tout x dans $\mathbb{R}^n$?

III.C– Maintenant f est une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.
Montrer que la matrice jacobienne J_f est symétrique pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si il existe g de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ f_i(x) = D_i g(x)$$

On pourra considérer l'application g définie par $g(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 f_i(tx)\,\mathrm{d}t$ et on exprimera $D_i g(x)$ sous forme d'une seule intégrale.

IV Matrice jacobienne orthogonale

Dans cette partie, f est une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.
On considère la proposition
$(\mathscr{P})$ Pour tout x de $\mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne $J_f(x)$ de f est orthogonale.
Pour x dans $\mathbb{R}^n$ et i, j, k dans $[\![1, n]\!]$, on note

$$\alpha_{i,j,k}(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x).\frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k}(x)$$

IV.A – On suppose $(\mathscr{P})$.
IV.A.1) Montrer que pour tous i, j et k de $[\![1, n]\!]$, $\alpha_{i,j,k} = \alpha_{i,k,j} = -\alpha_{k,j,i}$.
IV.A.2) En déduire que pour tous i, j et k de $[\![1, n]\!]$, $\alpha_{i,j,k} = 0$.
IV.A.3) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale A et un élément b de $\mathbb{R}^n$ tels que, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax+b$

On pourra interpréter les relations $\alpha_{i,j,k} = 0$ à l'aide de produits matriciels.

IV.B – Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.
À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur f, la proposition $(\mathscr{P})$ est-elle réalisée ?

IV.C – Si g est une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, on note $\Delta_g(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}$ (laplacien de g en x).
Montrer que $(\mathscr{P})$ est équivalente à la proposition
$(\mathscr{Q})$ Pour toute fonction g de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $\Delta_{g\circ f} = (\Delta_g) \circ f$.