

I Équations d'ordre 1

Exercice 1 (CCINP PSI 2018) [Solution]

1. Trouver α, β, γ tels que $\frac{1}{t(t^2 - 1)} = \frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t+1} + \frac{\gamma}{t-1}$
2. Résoudre $t(t^2 - 1)x' + 2x = t^2$.

Exercice 2 (Centrale PSI 2012) [Solution]

Soit $(E) : 2x(1+x)y' + (1+x)y = f(x)$

1. On suppose $f = 1$; résoudre (E) sur $]0, +\infty[$ et $] -1, 0[$ et donner les solutions sur $] -1, +\infty[$.
2. On suppose f DSE avec $R \geq 1$. Montrer qu'il existe une solution DSE de rayon ≥ 1 et exprimer ses coefficients en fonction de ceux de f .

Exercice 3 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Soit $(\mathcal{E}) : xy' + \lambda y = \frac{1}{1+x}$ avec $\lambda > 0$

1. Résoudre l'équation homogène sur \mathbb{R}^{+*}
2. Donner la forme générale des solutions de (\mathcal{E}) sur \mathbb{R}^{+*} à l'aide d'une intégrale
3. Montrer qu'il existe une unique solution de (\mathcal{E}) sur \mathbb{R}^{+*} bornée au voisinage de 0.

Exercice 4 (Centrale PSI 2018) [Solution]

Soit $(E) : x^2 y'(x) + y(x) = x^2$.

1. Résoudre (E) sur \mathbb{R}^{+*} .
Déterminer la solution f de (E) sur \mathbb{R}^{+*} qui tend vers 0 quand x tend vers 0 et donner un $DL_1(0)$ de f .
indication : pour le $DL_1(0)$, IPP en introduisant $\frac{1}{t^2} e^{-1/t}$
2. Déterminer les solutions DSE de (E) .
3. Montrer que f admet en 0 un développement limité à tout ordre.

Exercice 5 (Mines-Ponts PSI 2015) [Solution]

Soit f continue et intégrable sur \mathbb{R} .

1. Montrer que $y' - y = f$ admet une unique solution F bornée sur \mathbb{R} .
2. (dur!) Montrer que F est intégrable sur \mathbb{R} et relier $\int_{\mathbb{R}} F$ et $\int_{\mathbb{R}} f$.

indication : montrer que $\lim_{\pm\infty} F = 0$; pour la limite en $-\infty$, introduire $\varepsilon > 0$ et x_0 tel que $\int_{-\infty}^{x_0} |f| < \varepsilon$.

Exercice 6 (Mines-Ponts PSI 2021) [Solution]

1. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour laquelle il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(a) > 0$ et $\lim_{+\infty} f' + af = 0$. Montrer que $\lim_{+\infty} f = 0$
indication : poser $\varphi = f' + af$ et résoudre $y' + ay = \varphi$ de façon à trouver f en fonction de φ . Ensuite utiliser la définition de limite avec ε
2. Soit $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $\lim_{+\infty} g'' + g' + g = 0$. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
indication : appliquer la première question à $h = f' + bf$ avec b bien choisi

Exercice 7 (CCP PSI 2014) [Solution]

On note $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et ϕ l'application de E dans E qui à f associe g définie par $g(x) = f'(x) - xf(x)$.

1. Vérifier que ϕ est un endomorphisme de E .
2. Donner ses valeurs propres et ses vecteurs propres.
3. Décrire $\ker \phi^2$.

Exercice 8 (ENSAM PSI 2015) [Solution]

1. Montrer que si P est un polynôme impair alors $-y' + xy = P$ admet une unique solution polynomiale $u(P)$.
2. Que dire de la parité de $u(P)$? Les résultats subsistent-ils si P est pair ?
3. Montrer que f qui à $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ associe $Xu(P)$ est un endomorphisme de l'ensemble des polynômes impairs de degré $\leq 2n+1$, dont on donnera la matrice dans la base canonique.

II Systèmes différentiels

Exercice 9 [Solution]

Résoudre les systèmes $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 10 (CCP PSI 2017) [Solution]

Résoudre $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = -2x + y + z \\ z' = -2x + 3y - z \end{cases}$

Exercice 11 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?

2. Résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

Exercice 12 (CCP PSI 2022) [Solution]

1. Donner les éléments propres de $A(t) = \begin{pmatrix} 1-3t & 4t \\ -2t & 1+3t \end{pmatrix}$. Si A est diagonalisable, donner une matrice de passage P .

2. Résoudre $Y'(t) = A(t)Y(t)$.

Exercice 13 (CCP PSI 2015) [Solution]

Soit l'équation différentielle $(E) : x^{(3)} = 5x'' - 7x' + 3x$. On pose $X = {}^t(x \ x' \ x'')$.

1. Trouver $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X' = AX$.

2. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ puis trouver les solutions de (E) .

Exercice 14 (Centrale PSI 2013) [Solution]

Résoudre $\begin{cases} x'' = 3x - 2y \\ y'' = 4x - 3y \end{cases}$

Exercice 15 (Mines-Ponts PSI 2014) [Solution]

Soit le système différentiel $X' = AX$ avec $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. Montrer que $\|X(t)\|$ ne dépend pas de t .

2. Montrer, pour $Y \in \ker(A)$ que $(X(t)|Y)$ ne dépend pas de t .

3. Montrer que $X(t)$ est sur un cercle.

III Équations d'ordre 2 à coefficients constants

Exercice 16 [Solution]

Résoudre

1. $x'' + 2x' + x = te^{-t}$.

2. $x'' - 4x' + 3x = 6t + 1 + 4e^t + 8e^{-t}$.

3. $x'' + 4x = 8t \sin^2 t$.

Exercice 17 (Mines-Télécom PSI 2019) [Solution]

Résoudre sur \mathbb{R}^{+*} puis \mathbb{R}^{-*} et \mathbb{R} $y'' - 2y' + y = e^{|x|}$

Exercice 18 (CCP PSI 2007) [Solution]

Trouver les fonctions dérivables sur \mathbb{R} telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -f(\alpha - x)$.

indication : montrer qu'elles sont deux fois dérivables.

Exercice 19 (Mines-Ponts PSI 2022) [Solution]

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(E) : y'' - 9y = 3a|x| + b$

1. Résoudre (E) sur \mathbb{R} .

2. Montrer qu'il existe une unique solution admettant des asymptotes en $\pm\infty$.

Exercice 20 (ENTPE-EIVP MP 2007) [Solution]

Trouver toutes les fonctions f de classe C^1 sur \mathbb{R} telles que $f'(x) + f(-x) = e^x$.

Exercice 21 (Centrale PC 2014) [Solution]

Trouver les fonctions f , de classe C^1 sur \mathbb{R} et à valeurs réelles, telles que $f(0) = 2$ et $f'(x) - 5 \int_0^x f(t) \cos(x-t) dt = 10$.

Exercice 22 (Navale PSI 2010) [Solution]

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f \in C^0$ et bornée sur \mathbb{R} ; montrer que $y'' - a^2 y = f$ admet une unique solution continue et bornée sur \mathbb{R} .

indication : utiliser les compléments du cours pour trouver une solution particulière.

Exercice 23 (Mines-Ponts PSI 2012) [Solution]

Soit $f \in C^2$ telle que $f'' + f \geq 0$; montrer que $f(x) + f(x + \pi) \geq 0$ pour tout x .

indication : résoudre de $y'' + y = g$ avec les compléments du cours pour la solution particulière puis remplacer g par $f'' + f$.

Exercice 24 [Solution]

Soit $a \in \mathbb{R}$ et y une solution définie sur \mathbb{R} de
$$\begin{cases} y'' + |y| = 0 \\ y(0) = a \text{ et } y'(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $y \leq a$.

indication : montrer que y est concave (ie y' décroît).

2. Déterminer y si $a \leq 0$.

3. On suppose $a > 0$. Montrer que y possède exactement deux zéros $\alpha < 0$ et $\beta > 0$. Déterminer y .

indication : déterminer y sur les trois intervalles $]-\infty, \alpha[$, $]\alpha, \beta[$ et $]\beta, +\infty[$

IV Équations d'ordre 2 à coefficients non constants

Exercice 25 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Soit $(E_0) : x^2 y'' - 2y = 0$

1. Déterminer les solutions polynômiales de (E_0) .

2. Résoudre (E_0) sur \mathbb{R}^{+*} en posant $y(x) = x^2 z(x)$.

3. Résoudre (E_0) sur \mathbb{R}^+ .

4. Résoudre $x^2 y'' - 2y = x^3$

Exercice 26 (CCINP PSI 2019) [Solution]

1. Donner les solutions polynômiales de $(x^2 - 1)y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = 0$.

2. On pose $y(x) = xz(x)$; trouver une équation différentielle vérifiée par z

3. Déterminer a, b, c tels que $\frac{2 - 4x^2}{x(x^2 - 1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x + 1}$; en déduire z puis résoudre l'équation initiale sur $]-1, 1[$.

Exercice 27 (ENSAM PSI 2010) [Solution]

1. Trouver les solutions de la forme x^α de l'équation homogène associée à $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2$.

2. Trouver toutes les solutions de l'équation complète sur \mathbb{R}^{+*} et \mathbb{R}^{-*} après avoir vérifié que $x \mapsto x^2 \ln(x)$ est une solution.

Existe-t-il des solutions de l'équation complète sur \mathbb{R} ?

Exercice 28 (CCP MP 2010) [Solution]

Résoudre $(1 - x^2)y'' - 3xy' - y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$. On pourra vérifier que $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ est solution de l'équation homogène

puis poser $y(x) = \frac{z(x)}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Exercice 29 (CCP PSI 2010) [Solution]

Résoudre $x(x + 1)y'' + (x + 2)y' - y = 2$.

indication : trouver une solution y_0 non nulle de l'équation homogène et poser $y = y_0 \times z$.

Exercice 30 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^+)$ telle que $\forall x \geq 0, x^2 f(x) = 2 \int_0^x t f(x - t) dt$.

1. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} et en déduire $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{+*})$

2. Montrer que f vérifie, sur \mathbb{R}^{+*} , une équation différentielle d'ordre 2

3. Trouver f

V Changements de variables

Exercice 31 (EIVP PSI 2017) [Solution]

Résoudre $y'' + \frac{1}{t^2}y = 0$ en posant $t = e^x$. En déduire les solutions de $f'(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$.

Exercice 32 (Mines-Ponts PC 2011) [Solution]

Résoudre sur \mathbb{R}^{+*} $x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x}$ en posant $x = e^t$.

Exercice 33 (CCP PC 2006) [Solution]

Soit $(E) : xy'' - y' - 4x^3y = 0$.

1. Montrer que y est solution de (E) sur \mathbb{R}^{+*} si et seulement si $Y : x \mapsto y(\sqrt{x})$ est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.
2. Résoudre (E) sur \mathbb{R}^{+*} puis \mathbb{R}^{-*} .
3. Trouver les éventuelles solutions sur \mathbb{R} .

Exercice 34 (Mines-Ponts PSI 2015) [Solution]

Résoudre sur $] -1, 1[$, $4(1-t^2)y'' - 4ty' + y = 0$.

indication $t = \sin \theta$.

Exercice 35 [Solution]

Résoudre par changement de variable les équations

1. $(x^2 + 1)y'' + xy' - 4y = 0$.
2. $(1 - x^2)y'' - xy' + 4y = 2x^2$ sur $] -1, 1[$.

indication : chercher φ telle que si $y = z \circ \varphi$, z vérifie une équation que vous savez résoudre.

VI Résolutions avec DSE

Exercice 36 (CCP PSI 2015) [Solution]

1. Trouver une solution polynomiale non nulle P de $x^2y'' + xy' - y = 0$ puis trouver les solutions sur \mathbb{R}^{+*} et \mathbb{R}^{-*} .
indication : poser $y = P \times z$.

2. On suppose que $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ est solution de $x^2y'' + xy' - y = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Exprimer les a_n en fonction des b_n et déterminer une condition sur les a_n pour qu'une telle solution existe.

Exercice 37 (CCP PSI 2011) [Solution]

Résoudre sur $[0, \pi]$ $xy'' + 2y' + xy = 0$ en cherchant une solution DSE y_0 non nulle et en posant $y = y_0 \times z$.

Exercice 38 (Mines-Ponts PSI 2012) [Solution]

Trouver les solutions DSE de $xy'' - y' + 4x^3y = 0$ puis résoudre sur \mathbb{R}^{+*} et \mathbb{R} .

Exercice 39 (ENSAM PSI 2010) [Solution]

1. Trouver une solution y_0 non nulle et DSE de $4xy'' + 2y' - y = 0$.
2. Trouver une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x} \operatorname{ch}^2(\sqrt{x})}$ et en déduire les solutions de l'équation considérée en posant $y = y_0 \times z$.

Exercice 40 (Mines-Ponts PSI 2014) [Solution]

Trouver les solutions sur \mathbb{R} de $(1 + x^2)y'' + 4xy' + 2y = 1$.

indication : chercher les solutions DSE de l'équation homogène, ou de l'équation complète ou bien reconnaître le premier membre de l'équation.

Exercice 41 (Centrale PSI 2019) [Solution]

1. Rappeler le DSE de \arctan
2. Soit $(E) : (1 + x^2)y'' - 2y = 0$
 - a) Trouver une solution polynomiale de (E) .
 - b) Trouver une solution DSE (non polynomiale) de (E) .
 - c) Résoudre (E)

Exercice 42 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

On cherche y de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant $-2y'' + xy' - y = 0$ avec $y(0) = \sqrt{\pi}$ et $y'(0) = 0$

1. Y a-t-il existence et/ou unicité au problème posé? Donner une valeur explicite de y .

2. On rappelle $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$. Montrer que $f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2} dt$ est \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et trouver une équation différentielle vérifiée par f . Conclure.

VII Études qualitatives des solutions

Exercice 43 (Centrale PSI 2015) [Solution]

1. Soit a continue de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} , intégrable sur \mathbb{R}^+ . A-t-on $\lim_{+\infty} a = 0$?
2. On pose $g(x) = f(x) + \int_0^x \sin(x-t)a(t)f(t) dt$ où f est solution de $(E) : y''(x) + (1+a(x))y(x) = 0$. Montrer que g est \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^+ et vérifie $g'' + g = 0$.
3. En déduire qu'il existe $c > 0$ telle que $|f(x)| \leq c + \int_0^x |a(t)||f(t)| dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
4. Montrer que toutes les solutions de (E) sont bornées sur \mathbb{R}^+ .
indication : étudier $h(x) = a(x)f(x) \left(c + \int_0^x |a(t)||f(t)| dt \right)^{-1}$.

Exercice 44 (Centrale PSI 2019) [Solution]

Soit $(E) : y'' + \varphi(t)y = 0$ où φ est continue sur \mathbb{R} et à valeurs réelles.

1. Résoudre (E) dans le cas où φ est constante.
2. Soient f et g continues sur $[a, +\infty[$, g positive, telle que $\forall t \in [a, +\infty[$, $f(t) \leq M + \int_a^t f(u)g(u) du$.
 On pose $F(t) = M + \int_a^t f(u)g(u) du$ et $G(t) = \exp\left(\int_a^t g(u) du\right)$.
 En calculant la dérivée de $\frac{F}{G}$, montrer que $\forall t \in [a, +\infty[$, $f(t) \leq M \exp\left(\int_a^t g(u) du\right)$.
3. On suppose que $t \mapsto t\varphi(t)$ est intégrable sur $[a, +\infty[$.
 - a) Soit y une solution de (E) . Justifier qu'il existe une fonction affine A telle que $y(t) = A(t) - \int_a^t (t-u)y(u)\varphi(u) du$.
indication : poser $z(t) = - \int_a^t (t-u)y(u)\varphi(u) du$ et calculer z'' .
 - b) En déduire que $t \mapsto \frac{y(t)}{t}$ est bornée sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$

Exercice 45 (Centrale PSI 2016) [Solution]

1. Montrer que $(E) : y'' = (1+x^4)y$ admet une unique solution f telle que $f(0) = f'(0) = 1$.
2. On admet que f^{-2} est intégrable sur \mathbb{R}^+ . Montrer que $g : x \mapsto f(x) \int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^2}$ est solution de (E) .
3. Montrer que f^{-2} est intégrable sur \mathbb{R}^+ .
indication : en supposant que f s'annule sur \mathbb{R}^+ , introduire $\alpha = \sup\{a \geq 0, \forall t \in [0, a], f(t) > 0\}$ et aboutir à une absurdité ; puis en utilisant $f'' \geq 0$ sur \mathbb{R}^+ , démontrer que $f(x) \geq 1+x$.

Exercice 46 (Telecom SudParis PSI 2014) [Solution]

Soient a_1 et a_2 continues sur \mathbb{R} , y_1 une solution de $y'' + a_1y = 0$ et y_2 une solution de $y'' + a_2y = 0$. On suppose $a_1 < a_2$ et qu'il existe $\alpha < \beta$ tels que $y_1(\alpha) = y_1(\beta) = 0$ et $y_1 > 0$ sur $] \alpha, \beta [$.

Montrer qu'il existe $\gamma \in] \alpha, \beta [$ tel que $y_2(\gamma) = 0$. (on pourra raisonner par l'absurde et étudier y_2/y_1)

Exercice 47 [Solution]

Soit p une fonction continue sur \mathbb{R} , à valeurs négatives et (E) l'équation différentielle $y'' + py = 0$. Soit f une solution non nulle de (E) ; on suppose que f s'annule en x_0 .

1. Montrer que $f'(x_0) \neq 0$ et en déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0, x_0 + \alpha[$, $f(x) \neq 0$.
2. On suppose que f s'annule sur $]x_0, +\infty[$. Montrer que f possède dans $]x_0, +\infty[$ un plus petit zéro noté x_1 .
3. En examinant les signes de $f'(x_0)$ et $f'(x_1)$ aboutir à une contradiction et en déduire que toute solution de (E) s'annule au plus une fois sur \mathbb{R} .
indication : on pourra supposer $f > 0$ sur $]x_0, x_1[$.

Exercice 48 (Mines-Ponts MP 2010) [Solution]

Soit q une fonction continue sur \mathbb{R} , $q \leq 0$; montrer que f solution non nulle de $y'' + q(x)y = 0$ s'annule au plus une fois.
indication : raisonner par l'absurde et étudier la convexité (variations de f').

Exercice 49 (X-ESPCI PC 2011) [Solution]

1. Montrer que si y est une solution bornée de $y'' + \frac{x}{1+x^3}y = 0$ sur \mathbb{R}^+ alors $\lim_{+\infty} y' = 0$.

indication : montrer que y'' est intégrable sur \mathbb{R}^+

2. Montrer qu'il existe une solution non bornée.

indication : s'il existe f et g libres et bornées, étudier $w = f'g - fg'$.

Exercice 50 (Mines-Ponts PSI 2007) [Solution]

On note $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et pour $f \in E$, on note (E_f) l'équation différentielle $y'' - y = 2f$.

1. Justifier l'existence et l'unicité dans E d'une solution $\phi(f)$ de (E_f) telle que $\phi(f)(0) = \phi(f)'(0)$ et $\phi(f)(1) = -\phi(f)'(1)$.

indication : utiliser les compléments du cours pour trouver une solution particulière et l'expression de $\phi(f)$.

2. Montrer que ϕ est un endomorphisme continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Solutions

Exercice 1 [sujet] 1. $\frac{1}{t(t^2-1)} = \frac{-1}{t} + \frac{1/2}{t+1} + \frac{1/2}{t-1}$

2. Sur $] -\infty, -1[$ ou $] -1, 0[$ ou $] 0, 1[$ ou $] 1, +\infty[$, $x(t) = \alpha \frac{t^2}{t^2-1} + \frac{t^2}{t^2-1} \ln|t|$.

Sur $] -1, 1[$, $x(t) = \begin{cases} \alpha \frac{t^2}{t^2-1} + \frac{t^2}{t^2-1} \ln(-t) & \text{sur }] -1, 0[\\ 0 & \text{si } t = 0 \\ \beta \frac{t^2}{t^2-1} + \frac{t^2}{t^2-1} \ln(t) & \text{sur }] 0, 1[\end{cases}$ puis, sur \mathbb{R}^{+*} , la seule solution dérivable en 1 (idem en -1) est $x(t) = \begin{cases} \frac{t^2 \ln(t)}{t^2-1} & \text{si } t \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 1 \end{cases}$ et sur \mathbb{R} entier la seule solution est $x(t) = \begin{cases} \frac{t^2 \ln|t|}{t^2-1} & \text{si } t \notin \{0, 1, -1\} \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ 1/2 & \text{si } t = \pm 1 \end{cases}$

Exercice 2 [sujet] 1. Sur $] 0, +\infty[$, $y(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan(\sqrt{x})$; sur $] -1, 0[$, $y(x) = \frac{\beta}{\sqrt{-x}} + \frac{1}{2\sqrt{-x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right)$.
Recollement sur $] -1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha = \beta = 0$ (avec $y(0) = 1$)

2. Si $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $y(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ (avec $R > 0$), on vérifie $2x(1+x)y'(x) + (1+x)y(x) = b_0 + \sum_{n \geq 1} [(2n+1)a_n + (2n-1)a_{n-1}]x^n$ donc y est solution sur $] -R, R[$ si et seulement si $\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_n = -\frac{2n-1}{2n+1}b_{n-1} + \frac{a_n}{2n+1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$ On en déduit $b_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_{k=0}^n a_k$ puis on vérifie $R_b \geq R_a = 1$.

Exercice 3 [sujet] 1. $y_0(x) = \frac{\alpha}{x^\lambda}$

2. $y(x) = \frac{1}{x^\lambda} \left(\alpha + \int_1^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t} dt \right)$

3. $\int_0^1 \frac{t^{\lambda-1}}{1+t} dt$ converge donc la seule solution éventuellement bornée est pour $\alpha = \int_0^1 \frac{t^{\lambda-1}}{1+t} dt$ donc $y(x) = \frac{1}{x^\lambda} \int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t} dt$ qui est bien bornée car $|y(x)| \leq \frac{1}{x^\lambda} \int_0^x t^{\lambda-1} dt = \frac{1}{\lambda}$

Exercice 4 [sujet] 1. Les solutions sont $y(x) = \alpha e^{1/x} + e^{1/x} \int_0^x e^{-1/t} dt$ (la primitive existe car $t \mapsto e^{-1/t}$ est prolongeable par continuité en 0).
 $\left| \int_0^x e^{-1/t} dt \right| \leq e^{1/x} x e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ car $t \mapsto e^{-1/t}$ est croissante sur $[0, x]$; la seule fonction tendant vers 0 est donc $f(x) = e^{1/x} \int_0^x e^{-1/t} dt$.
Par IPP, on a $f(x) = e^{1/x} \int_0^x t^2 \times \frac{1}{t^2} e^{-1/t} dt = [t^2 e^{-1/t}]_0^x - 2e^{1/x} \int_0^x t e^{-1/t} dt$ et comme $\left| \int_0^x t e^{-1/t} dt \right| \leq x^2 e^{-1/x}$, on a $f(x) = O(x^2) = 0 + o(x)$.

2. Si $R > 0$ et $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ alors $x^2 y'(x) + y(x) = a_0 + \sum_{n \geq 1} [(n-1)a_{n-1} + a_n] x^n$ donc y est solution sur $] -R, R[$ si et seulement si $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_n = -(n-1)a_{n-1}$ pour $n \geq 3$; on trouve $a_n = (-1)^n (n-1)!$ donc $R = 0$ (donc pas de sol DSE)

3. On montre par récurrence que $f(x) = P_n(x) + \alpha_n e^{1/x} \int_0^x t^n e^{-1/t} dt$ car $\int_0^x t^n e^{-1/t} dt = [t^{n+2} e^{-1/t}]_0^x - (n+2) \int_0^x t^{n+1} e^{-1/t} dt$ donc $P_{n+1} = P_n + \alpha_n X^{n+1}$ et $\alpha_{n+1} = -(n+2)\alpha_n$. On a encore $\left| \int_0^x t^n e^{-1/t} dt \right| \leq x^{n+1} e^{-1/x}$ donc $f(x) = P_n(x) + O(x^n)$ donne le DL $_{n-1}(0)$ de f .

Exercice 5 [sujet] 1. Les solutions sont $y(x) = \alpha e^x + e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt$; la seule bornée est $F(x) = -e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ ($\alpha = -\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ sinon la limite en $+\infty$ n'est pas finie et cette intégrale CV car $e^{-t} f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(f(t))$) car on vérifie $|F(x)| \leq \int_x^{+\infty} |f(t)| dt \leq \int_{\mathbb{R}} |f|$ donc bornée.

2. On commence par prouver que $\int_{\mathbb{R}} F$ CV : par IPP $\int_0^x f(t) dt = F(x) - \int_0^x F(t) dt$ donc il suffit de vérifier que $\lim_{+\infty} F = 0$, ce qui est justifié par $|F(x)| \leq \int_x^{+\infty} |f(t)| dt$. De l'autre côté, on a de même $\int_x^0 f(t) dt = -F(x) - \int_x^0 F(t) dt$ puis, si $x < 0$, $|F(x)| \leq \int_{-\infty}^{x_0} |f(t)| dt + e^x C \leq 2\varepsilon$ si x grand avec $C = \int_{x_0}^0 e^{-t} |f(t)| dt = Cte$. On a donc $\int_{\mathbb{R}} f = - \int_{\mathbb{R}} F$. Pour finir, l'intégrabilité de F se prouve en remarquant que $|F(t)| \leq e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} |f(t)| dt = G(x)$; il suffit donc d'appliquer ce qui a été fait avec $|f|$ au lieu de f pour justifier la CV de $\int_{\mathbb{R}} G(t) dt$

Exercice 6 [sujet] 1. on a $f(x) = f(0)e^{-ax} + e^{-ax} \int_0^x e^{au} \varphi(u) du$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(0)e^{-ax} = 0$ et, si $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que $|\varphi| < \varepsilon$ si $x > A$; on écrit alors $\left| e^{-ax} \int_0^x e^{au} \varphi(u) du \right| \leq e^{-\operatorname{Re}(a)x} \int_0^A e^{\operatorname{Re}(a)u} |\varphi(u)| du + \varepsilon e^{-\operatorname{Re}(a)x} \int_A^x e^{\operatorname{Re}(a)u} du \leq e^{-\operatorname{Re}(a)x} \int_0^A e^{\operatorname{Re}(a)u} |\varphi(u)| du + \varepsilon$ et il existe $B > A$ tel que $e^{-\operatorname{Re}(a)x} \int_0^A e^{\operatorname{Re}(a)u} |\varphi(u)| du < \varepsilon$ pour $x > B$ (l'intégrale est une constante). Pour $x > B$, on a $\left| e^{-ax} \int_0^x e^{au} \varphi(u) du \right| < 2\varepsilon$

2. on a $h' + af = f'' + (a+b)f' + abf$ donc on cherche a, b tels que $\begin{cases} a+b=1 \\ ab=1 \end{cases}$; on prend $a = -j$ et $b = -j^2$. Comme $\operatorname{Re}(b) = \frac{1}{2} > 0$, on déduit de la première question $\lim_{+\infty} h = 0$ puis, comme $\operatorname{Re}(a) = \frac{1}{2} > 0$, $\lim_{+\infty} f = 0$

Exercice 7 [sujet] 1. évident

2. $\phi(f) = \lambda f$ si f est solution de $y' - (x - \lambda)y = 0$ dont les solutions sont $y(x) = \alpha e^{x^2/2 - \lambda x}$ (donc il y a des solutions non nulles; $\operatorname{Sp}(\phi) = \mathbb{R}$ et $E_\lambda(\phi) = \operatorname{Vect} \{x \mapsto e^{x^2/2 - \lambda x}\}$ est une droite.

3. $f \in \ker(\phi^2)$ si et seulement si $\phi(f) \in \ker(\phi)$ donc si et seulement si $\phi(f) = \alpha e^{x^2/2}$; f est donc solution de $y' - xy = \alpha e^{x^2/2}$ donc $f(x) = \beta e^{x^2/2} + \alpha x e^{x^2/2}$ donc $\ker(\phi^2) = \operatorname{Vect} \{x \mapsto e^{x^2/2}, x \mapsto x e^{x^2/2}\}$ est un plan

Exercice 8 [sujet] 1. Les solutions sont $y(x) = \alpha e^{x^2/2} - e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} P(t) dt$; la seule solution polynômiale est $u(P) : x \mapsto e^{x^2/2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} P(t) dt$: calculer $\int_x^{+\infty} t^{2n+1} e^{-t^2/2} dt$ par IPP pour vérifier que c'est un polynôme; les autres (avec $\alpha \neq \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} P(t) dt$) ne le sont pas car elles sont équivalentes en $+\infty$ à $\alpha e^{x^2/2}$.

2. $u(P)(-x) - u(P)(x) = e^{x^2/2} \int_{-x}^x P(t) e^{-t^2/2} dt = 0$ par chgt de variable $u = -t$ (avec P impair) donc $u(P)$ est pair. Si $P = 1$ alors aucune solution n'est polynômiale car (même argument), la seule solution polynômiale possible serait $y(x) = e^{x^2/2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$ et on aurait alors $\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = y(x) e^{-x^2/2} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ ce qui est absurde car $e^{t^2/2} > 0$.

3. On vérifie par IPP que $f(X^{2k+1}) = \frac{1}{2} X^{2k+1} + k f(X^{2k-1})$ donc $f(X^{2k+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!} X^{2i+1}$.

Exercice 9 [sujet] 1. $X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^t \\ \beta e^{5t} \end{pmatrix}$

2. $X(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^{-2t} \\ \beta e^{2t} \\ \gamma e^{4t} \end{pmatrix}$

3. $X(t) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^{3t} \\ \beta \\ \beta t + \gamma \end{pmatrix}$

Exercice 10 [sujet] $X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta e^{2t} \\ \gamma e^{-2t} \end{pmatrix}$

Exercice 11 [sujet] 1. $\mathcal{N}_A = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$ SARS

2. Si $A = P \text{diag}(1, 2, 3) P^{-1}$ alors $X(t) = P \begin{pmatrix} \alpha e^t \\ \beta e^{2t} \\ \gamma e^{3t} \end{pmatrix}$

Exercice 12 [sujet] 1. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = P \text{diag}(1+t, 1-t) P^{-1}$

2. $X(t) = P \begin{pmatrix} \alpha e^{t+t^2/2} \\ \beta e^{t-t^2/2} \end{pmatrix}$

Exercice 13 [sujet] 1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$

2. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ puis $X(t) = P \begin{pmatrix} (\gamma + \beta t)e^t \\ \beta e^t \\ \alpha e^{3t} \end{pmatrix}$ donc $x(t) = (\gamma + \beta t)e^t + \alpha e^{3t}$

Exercice 14 [sujet] $X'' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ donc $Y'' = \text{diag}(i, -i)Y$ puis

$$X(t) = \begin{pmatrix} 3+i & 3-i \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \exp((1+i)t/\sqrt{2}) + \beta \exp((-1+i)t/\sqrt{2}) \\ \gamma \exp((1-i)t/\sqrt{2}) + \delta \exp((-1-i)t/\sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

Exercice 15 [sujet] 1. Si $\varphi(t) = \|X(t)\|^2$ alors $\varphi'(t) = 2(X'(t)|X(t)) = 2(AX(t)|X(t)) = 0$ car $(AX|X) = (X|^t AX) = -(X|AX)$

2. si $\psi(t) = (X(t)|Y)$ alors $\psi'(t) = (X'(t)|Y) = (AX(t)|Y) = (X(t)|^t AY) = -(X(t)|AY) = 0$

3. ϕ est constante donc sur la sphère (centré en O) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = \varphi$. On a $A = -^t A$ donc $\det(A) = (-1)^3 \det(A)$ puis $\det(A) = 0$; on choisit $Y \neq 0$ dans $\ker(A)$. On a alors $(X(t)|Y) = (X(0)|Y)$ donc $X(t) - X(0) \in \text{Vect}\{Y\}^\perp$; la solution est donc dans le plan affine $P = X(0) + \text{Vect}\{Y\}^\perp$. L'intersection d'une sphère et d'un plan est un cercle (ou vide, mais c'est absurde car une solution X existe par C-Lip)

Exercice 16 [sujet] 1. $x(t) = (\alpha + \beta t)e^{-t} + \frac{1}{2}t^2 e^{-t}$

2. $x(t) = \alpha e^t + \beta e^{3t} + 2t + 3 - 2te^t + e^{-t}$

3. $8t \sin^2 t = 4t + 4 \text{Re}(te^{2it})$ donc $x(t) = \alpha \cos(2t) + \beta \sin(2t) + t + \text{Re}\left(\left(-it^2 + \left(\frac{1}{2} - 2i\right)t\right)e^{2it}\right)$

Exercice 17 [sujet] Sur \mathbb{R}^{+*} , $y(x) = (ax + b)e^x + \frac{x^2}{2}e^x$, sur \mathbb{R}^{-*} , $y(x) = (ax + b)e^x + \frac{1}{4}e^{-x}$ et sur \mathbb{R} , $y(x) =$

$$\begin{cases} (ax + b)e^x + \frac{x^2}{2}e^x & \text{si } x \in \mathbb{R}^+ \\ \left[\left(a + \frac{1}{2}\right)x + b - \frac{1}{4}\right]e^x + \frac{1}{4}e^{-x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^{-*} \end{cases}$$

Exercice 18 [sujet] Si f est solution alors par composition f' est dérivable. f est donc solution si et seulement si $f'(0) = -f(\alpha)$ et $f''(x) = f'(\alpha - x) = -f(x)$ donc $f(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$ avec $a \cos \alpha + (1 - \sin \alpha)b = 0$ (discuter selon la valeur de α pour trouver le nombre de solutions de cette équation)

Exercice 19 [sujet] 1. Tous calculs faits, on trouve $y(x) = \begin{cases} \alpha e^{3x} + \beta e^{-3x} - 3ax - b & \text{si } x \geq 0 \\ (\alpha - a)e^{3x} + (\beta + a)e^{-3x} + 3ax - b & \text{si } x < 0 \end{cases}$

2. Si y admet une asymptote en $+\infty$ alors on a un des deux cas suivants :

— soit y tend vers une limite finie en $+\infty$, ce qui n'arrive que si $\alpha = 0$ et $a = 0$. Dans ce cas, on vérifie que $y = b$ est asymptote en $+\infty$.

— soit y tend en $+\infty$ vers $\pm\infty$ et $\frac{y(x)}{x}$ tend vers une limite non nulle en $+\infty$, ce qui n'arrive cette fois que si $\alpha = 0$ (et $a \neq 0$). La droite d'équation $y = 3ax + b$ est alors asymptote en $+\infty$.

En faisant de même en $-\infty$, on obtient dans le cas $a = 0$ la fonction avec $\alpha = \beta = 0$ avec $y = b$ asymptote horizontale en $\pm\infty$. Et dans le cas $a \neq 0$, $\alpha = 0$ et $\beta = -a$ qui donne la droite $y = 3a + b$ asymptote en $+\infty$ et $y = -3ax + b$ en $-\infty$.

Exercice 20 [sujet] Si f est solution alors f' est \mathcal{C}^1 donc f est solution si et seulement si $e^x = f''(x) - f'(-x) = f''(x) + f(x) - e^{-x}$ et $f'(0) + f(0) = 1$; on trouve $f(x) = a(\cos(x) - \sin(x)) + \text{ch}(x)$

Exercice 21 [sujet] Si f est solution alors $f'(x) = 10 + 5 \cos(x) \int_0^x f \times \cos + 5 \sin(x) \int_0^x f \times \sin$ donc f' est \mathcal{C}^2 puis \mathcal{C}^∞ par récurrence.

f est solution si et seulement si $f(0) = 2$, $f'(0) = 10$ et $f''(x) = 5f(x) - 5 \sin(x) \int_0^x f \times \cos + 5 \cos(x) \int_0^x f \times \sin$ donc si et seulement si $f(0) = 2$, $f'(0) = 10$, $f''(0) = 5f(0) = 10$ et $f'''(x) = 4f'(x)$. On a donc $f'(x) = 10 \cos(2x) + 5 \sin(2x)$ et $f(x) = 5 \sin(2x) - \frac{5}{2} \cos(2x) + \frac{9}{2}$.

Exercice 22 [sujet] On a $y(x) = \alpha e^{ax} + \beta e^{-ax} + \frac{1}{2} e^{ax} \int_0^x f(t) e^{-at} dt - \frac{1}{2} e^{-ax} \int_0^x f(t) e^{at} dt$. On a, pour $x \geq 0$, $\left| e^{ax} \int_0^x f(t) e^{-at} dt \right| \leq \|f\|_\infty e^{ax} \left[\frac{e^{-at}}{-a} \right]_0^x \leq \frac{1}{a} \|f\|_\infty$ (de même pour $x < 0$ et l'autre terme) donc y est bornée si et seulement si $x \mapsto \alpha e^{ax} + \beta e^{-ax}$ est bornée sur \mathbb{R} donc si et seulement si $\alpha = \beta = 0$.

Exercice 23 [sujet] Les solutions de $y'' + y = g$ sont $y(x) = a \cos(x) + b \sin(x) - \cos(x) \int_0^x f \times \sin + \sin(x) \int_0^x f \times \cos$ donc $f(x) = a \cos(x) + b \sin(x) + \int_0^x (f(t) + f''(t)) \sin(x-t) dt$ et $f(x) + f(x+\pi) = - \int_x^{x+\pi} (f(t) + f''(t)) \sin(x-t) dt \stackrel{u=x-t}{=} - \int_0^\pi (f(x-u) + f''(x-u)) \sin(u) du \geq 0$.

Exercice 24 [sujet] 1. On a $y'' = -|y| \leq 0$ donc y' décroît; $y'(0) = 0$ donc $y' \leq 0$ sur \mathbb{R}^+ et $y(0) = a$ donc $y \leq a$ sur \mathbb{R}^+ (de même sur \mathbb{R}^-)

2. Si $a \leq 0$ alors $y \leq 0$ donc l'équation devient $y'' - y = 0$ et $y(x) = a \operatorname{ch}(x)$

3. Si $a > 0$ et si on suppose que y ne s'annule pas sur \mathbb{R}^+ alors $y > 0$ car $y(0) = a > 0$ donc $y'' + y = 0$ sur \mathbb{R}^+ puis $y(x) = a \cos(x)$ qui s'annule donc c'est absurde. Donc y s'annule au moins une fois sur \mathbb{R}^+ ; on pose $\beta = \inf\{x \in \mathbb{R}^+, y(x) = 0\}$ (existence à vérifier), par continuité de y , on a $y(\beta) = 0$ et comme $y > 0$ sur $[0, \beta[$, on a nécessairement $y'(\beta) \leq 0$. y est donc solution de $y'' + |y| = 0$ avec $y(\beta) = 0$ et $y'(\beta) = b \leq 0$; le raisonnement de la question 1 prouve alors que $y \leq 0$ sur $[\beta, +\infty[$.

On résout alors sur les trois intervalles : sur $] \alpha, \beta[$, $y'' + y = 0$ donc $y(x) = a \cos(x)$ et $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ et $y'(\pi/2) = -a$; sur $]\frac{\pi}{2}, +\infty[$, $y'' - y = 0$ donc $y(x) = \gamma \operatorname{ch}(x) + \delta \operatorname{sh}(x)$ avec $y(\pi/2) = \gamma \operatorname{ch}(\pi/2) + \delta \operatorname{sh}(\pi/2) = 0$ et $y'(\pi/2) = \gamma \operatorname{sh}(\pi/2) + \delta \operatorname{ch}(\pi/2) = -a$.

Exercice 25 [sujet] 1. On prouve qu'elles sont nécessairement de degré 2 puis de la forme αx^2 .

2. z et y sont simultanément 2 fois dérivables sur \mathbb{R}^{+*} et z vérifie $x^4 z'' + 4x^3 z' = 0$ donc $z(x) = \frac{\alpha}{x^3} + \beta$ et $y(x) = \frac{\alpha}{x} + \beta x^2$.

3. Les solutions sont prolongeables en 0 si et seulement si $\alpha = 0$ et dans ce cas solutions sur \mathbb{R} (on retrouve les solutions polynômiales du début)

4. $x \mapsto \frac{x^3}{3}$ est une solution particulière donc $y(x) = \frac{\alpha}{x} + \beta x^2 + \frac{x^3}{4}$

Exercice 26 [sujet] 1. Elles sont de degré 1, on trouve αx

2. y est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ si et seulement si z l'est et y est solution si et seulement si z vérifie $x(x^2 - 1)z'' + 2(2x^2 - 1)z' = 0$

3. $\frac{2 - 4x^2}{x(x^2 - 1)} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$ puis $z'(x) = \frac{\alpha}{x^2(x^2 - 1)}$ sur chacun des 4 intervalles de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ puis $z(x) = \alpha \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right) + \beta$ et $y(x) = \alpha \left(-1 + \frac{x}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right) + \beta x$ sur $] -1, 0[$ ou $] 0, 1[$. Recollement en 0 : on trouve $y(x) = \alpha \left(-1 + \frac{x}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right) + \beta x$ sur $] -1, 1[$ avec $y(0) = -\alpha$.

Exercice 27 [sujet] 1. X et X^2 sont solutions de \mathcal{E}_0 sur \mathbb{R}^{+*} et \mathbb{R}^{-*} donc (C-Lip) forment une base des solutions de \mathcal{E}_0 sur ces intervalles

2. $y(x) = ax + bx^2 + x^2 \ln(x)$ sur chaque intervalle. Aucune solution sur \mathbb{R} car y n'est jamais deux fois dérivable en 0.

Exercice 28 [sujet] z est solution sur $] -1, 1[$ de $(1 - x^2)z''(x) - xz'(x) = x$ donc $z'(x) = -\frac{1}{3} + \frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}}$ et $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(-\frac{x}{2} + \alpha \arcsin(x) + \beta \right)$

Exercice 29 [sujet] $y(x) = (x+2)z(x)$; z est solution de $x(x+1)(x+2)z''(x) + (2x(x+1) + (x+2)^2)z'(x)$ donc $z'(x) = \alpha \frac{x+1}{(x^2+2x)^2}$ et $y(x) = (x+2) \left(\frac{-\alpha}{2(x^2+2x)} + \beta \right)$

Exercice 30 [sujet] 1. Pour $x > 0$, on a $f(x) \stackrel{u=x-t}{=} \frac{1}{x^2} \left(2x \int_0^x f(u) du - 2 \int_0^x u f(u) du \right)$ donc f est \mathcal{C}^1 car f et $id \times f$ sont \mathcal{C}^0 sur \mathbb{R}^{+*} puis \mathcal{C}^∞ par récurrence

2. On trouve $x^2 f''(x) + 4x f'(x) = 0$

3. Sur \mathbb{R}^{+*} , on a $f(x) = \frac{\alpha}{x^3} + \beta$ et comme f est continue sur \mathbb{R}^+ , on doit avoir $\alpha = 0$; réciproquement les fonctions constantes sont solutions

Exercice 31 [sujet] On pose $y(t) = z(\ln t)$ et y est sol de \mathcal{E} sur \mathbb{R}^{+*} si et seulement si z est solution sur \mathbb{R} de $z''(x) - z'(x) + z(x) = 0$ donc $y(t) = \sqrt{t} \left(a \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t) + b \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t) \right)$

Si f est solution alors f' est dérivable puis f est solution si et seulement si $f''(t) + \frac{1}{t^2} f(t) = 0$ avec $f'(1) = f(1)$

Exercice 32 [sujet] On pose $y(x) = z(e^x)$; y est solution de \mathcal{E} sur \mathbb{R}^{+*} si et seulement si z est solution sur \mathbb{R} de $z''(t) + 2z(t) + z(t) = e^{-t}$ donc $y(x) = \frac{\alpha + \beta \ln(x)}{x} + \frac{(\ln x)^2}{2x}$

Exercice 33 [sujet] 1. $Y'' - Y = 0$ donc $y(x) = \alpha \operatorname{ch}(x^2) + \beta \operatorname{sh}(x^2)$

2. Sur \mathbb{R}^{-*} , on pose $Z(x) = y(-x^2)$, $Z'' + Z = 0$ donc $y(x) = a \cos(x^2) + b \sin(x^2)$

3. Recollement deux fois dérivable si et seulement si $\alpha = a$ et $\beta = b$.

Exercice 34 [sujet] $z(\theta) = y(\sin \theta)$; y est solution de \mathcal{E} sur $] -1, 1[$ si et seulement si z est solution sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de $4z''(\theta) + z(\theta) = 0$ donc $y(t) = \alpha \cos \frac{1}{2} \arcsin(t) + \beta \sin \frac{1}{2} \arcsin(t)$

Exercice 35 [sujet] 1. $z(t) = y(\operatorname{sh} t)$; y est solution de \mathcal{E} sur \mathbb{R} si et seulement si z est solution sur \mathbb{R} de $z'' - 4z = 0$ donc $z(t) = \alpha \operatorname{ch}(2t) + \beta \operatorname{sh}(2t) = \alpha(1 + 2 \operatorname{sh}^2 t) + 2\beta \operatorname{ch}(t) \operatorname{sh}(t)$ donc $y(x) = \alpha(1 + 2x^2) + 2\beta x \sqrt{1 + x^2}$

2. $z(t) = y(\sin t)$; y est solution de \mathcal{E} sur $] -1, 1[$ si et seulement si z est solution sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de $z''(t) + 4z(t) = 2 \sin^2 t = 1 - \cos(2t)$ donc $y(x) = \alpha \cos 2 \arcsin(x) + \beta \sin 2 \arcsin(x) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \arcsin(x) \sin 2 \arcsin(x)$.

Exercice 36 [sujet] 1. X est solution puis $y(x) = x \left(\frac{\alpha}{x^2} + \beta \right)$

2. $x^2 y''(x) + x y'(x) - y(x) = \sum_{n \geq 0} (n^2 - 1) a_n x^n$ donc y est solution sur $] -R, R[$ si et seulement si $(n^2 - 1) a_n = b_n$; il faut donc que $b_1 = 0$ et dans ce cas, on a une solution avec $R_a = R_b$.

Exercice 37 [sujet] $xy'''(x) + 2y'(x) + xy(x) = a_1 + \sum_{n \geq 1} [(n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1}] x^n$ donc y est solution sur $] -R, R[$

si et seulement si $a_1 = 0$ et $a_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} a_{n-1}$, on trouve $R = +\infty$, $y(x) = \frac{\sin x}{x}$ puis les solutions de \mathcal{E} sont $y(x) = \alpha \frac{\sin x}{x} + \beta \frac{\cos x}{x}$ prolongeables en 0 et π deux fois dérivables si et seulement si $\beta = 0$.

Exercice 38 [sujet] $xy''(x) - y'(x) + 4x^3 y(x) = -a_1 + 2a_3 x^2 + \sum_{n \geq 3} [(n^2 - 1)a_{n+1} + 4a_{n-3}] x^n$ donc y est solution sur

$] -R, R[$ si et seulement si $a_1 = a_3 = 0$ et $a_{n+1} = \frac{-4}{n^2 - 1} a_{n-3}$ pour $n \geq 3$. On en déduit l'existence de deux solutions

DSE linéairement indépendantes : $y_1(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^{4n}$ et $y_2(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^{4n+2}$ avec $b_0 = 1$, $b_{4n+4} = \frac{-4}{(4n+3)^2 - 1} b_{4n}$ (donc

$R_1 = +\infty$), $c_0 = 1$ et $c_{4n+2} = \frac{-4}{(4n+1)^2 - 1} c_{4n-2}$ (donc $R_2 = +\infty$).

Sur \mathbb{R}^{+*} , C-Lip s'applique donc l'ensemble des solutions est un plan, donc (y_1, y_2) en est une base. De même sur \mathbb{R}^{-*} .

Les solutions sur \mathbb{R} sont de la forme $y(x) = \begin{cases} \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) & \text{si } x < 0 \\ y(0) & \text{si } x = 0 \\ \gamma y_1(x) + \delta y_2(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ Une telle solution est continue en 0 si et

seulement si $\alpha = \gamma$, elle est alors \mathcal{C}^1 puis deux fois dérivable en 0 si et seulement si $\beta = \delta$; les solutions sur \mathbb{R} sont donc $\operatorname{Vect}\{y_1, y_2\}$ (donc toutes DSE).

Exercice 39 [sujet] 1. $4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = \sum_{n \geq 0} [2(n+1)(2n+1)a_{n+1} - a_n]x^n$ donc y est solution sur $] -R, R[$ si et

seulement si $a_{n+1} = \frac{a_n}{(2n+2)(2n+1)}$ donc $a_n = \frac{a_0}{(2n)!}$ et $R = +\infty$; on a donc $y(x) = a_0 \begin{cases} \text{ch}(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \\ \cos(\sqrt{-x}) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

2. On pose $y(x) = \text{ch}(\sqrt{x})z(x)$ sur \mathbb{R}^{+*} ; y est solution sur \mathbb{R}^{+*} si et seulement si $z''(x) + z'(x) \left(\frac{\text{sh}(\sqrt{x})}{\sqrt{x} \text{ch}(\sqrt{x})} + \frac{1}{2x} \right) = 0$ donc $z'(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{x} \text{ch}(\sqrt{x})}$ et $z(x) = 2\alpha \text{th}(\sqrt{x}) + \beta$. Les solutions sur \mathbb{R}^{+*} sont $y(x) = a \text{ch}(\sqrt{x}) + b \text{sh}(\sqrt{x})$.

On vérifie que $x \mapsto \cos(\sqrt{-x})$ et $x \mapsto \sin(\sqrt{-x})$ sont deux solutions linéairement indépendantes sur \mathbb{R}^{-*} donc une base des solutions puisque C-Lip s'applique sur \mathbb{R}^{-*} .

Exercice 40 [sujet] Si $u(x) = 1 + x^2$ alors $(1 + x^2)y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = (uy)''(x)$ donc $(1 + x^2)y(x) = \frac{x^2}{2} + \alpha x + \beta$.

Exercice 41 [sujet] 1. Cours

2. a) $P = 1 + X^2$ convient

b) Si $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ avec $R > 0$ alors $(1 + x^2)y''(x) - 2y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)[(n+2)a_{n+2} + (n-2)a_n]x^n$ donc y est

solution sur $] -R, R[$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = -\frac{n-2}{n+2}a_n$. On a donc $a_4 = 0$ puis $a_{2p} = 0$ pour $p \geq 2$

(c'est la solution polynômiale) et avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, on a $a_{2p+1} = \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)(2p-1)}$ et $a_{2p} = 0$. On vérifie

$R = 1$ et, pour $|x| < 1$, $y(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p+1} x^{2p+1} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1} x^{2p+1} \right) = (1 + x^2) \arctan(x) - x$

c) La fonction $x \mapsto (1 + x^2) \arctan(x) - x$ n'est DSE que sur $] -1, 1[$ mais est \mathcal{C}^∞ et solution sur \mathbb{R} . Comme $x \mapsto \frac{2}{1+x^2}$ est \mathcal{C}^0 sur \mathbb{R} , le théorème de C-Lip s'applique donc l'ensemble des solutions sur \mathbb{R} est un plan; $x \mapsto 1 + x^2$ et $x \mapsto (1 + x^2) \arctan(x) - x$ sont libres donc les solutions sur \mathbb{R} sont $y : x \mapsto \alpha(1 + x^2) + \beta((1 + x^2) \arctan(x) - x)$

Exercice 42 [sujet] 1. C-Lip s'applique donc existence et unicité. On peut trouver y en remarquant que $y(x) = x$ est soliton de l'équation puis en posant $y(x) = xz(x)$ (mais il faut distinguer \mathbb{R}^{+*} et \mathbb{R}^{-*} avant de recoller).

On cherche les solutions DSE : $2y''(x) - xy'(x) + y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)[2(n+2)a_{n+2} - a_n]x^n$ donc $a_{2p+1} = 0$ avec

$a_1 = y'(0) = 0$ et $a_{2p} = \frac{\sqrt{\pi}}{4^p p!}$ avec $a_0 = y(0) = \sqrt{\pi}$. On a donc $R = +\infty$ et $y(x) = \sqrt{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{4^n n!} = \sqrt{\pi} e^{x^2/4}$.

2. On applique le th de dérivation avec $\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq t^2 e^{at-t^2} \underset{t \rightarrow \pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ si $x \in [-a, a]$. On a $xf'(x) - 2f''(x) =$

$\int_{-\infty}^{+\infty} t(x-2t)e^{tx-t^2} dt \stackrel{\text{IPP}}{=} f(x)$. On a aussi $f(0) = \sqrt{\pi}$ et $f'(0) = 0$ (intégrale sur \mathbb{R} d'une fonction impaire) donc $f(x) = \sqrt{\pi} e^{x^2/4}$

Exercice idiot car en fait $f'(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} \times te^{-t^2} dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{x}{2} f(x)$ donc ça ne sert à rien de passer par une eq diff d'ordre 2.

Exercice 43 [sujet] 1. non!

2. $g(x) = f(x) + \sin(x) \int_0^x af \times \cos - \cos(x) \int_0^x af \times \sin$ donc f est \mathcal{C}^1 et $g'(x) = f'(x) + \cos(x) \int_0^x af \times \cos + \sin(x) \int_0^x af \times$

\sin ; g' est \mathcal{C}^1 et $g''(x) = f''(x) + a(x)f(x) - \sin(x) \int_0^x af \times \cos + \cos(x) \int_0^x af \times \sin = f''(x) + (1 + a(x))f(x) - g(x)$

3. $g(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$ est bornée ($|g| \leq c$) puis $|f(x)| = \left| g(x) - \int_0^x \sin(x-t)a(t)f(t) dt \right| \leq c + \int_0^x |a(t)f(t)| dt$.

4. On a $|h(x)| \leq |a(x)|$ et on remarque que $|h(x)|$ est la dérivée de $x \mapsto \ln \left(c + \int_0^x [a(t)f(t)] dt \right)$; en intégrant, on a

$\ln \left(c + \int_0^x |a(t)f(t)| dt \right) \leq \int_0^x |a(t)| dt + d \leq d + \int_0^{+\infty} |a(t)| dt$ puis (avec 2), $|f(x)| \leq c + \exp \left(d + \int_0^{+\infty} |a(t)| dt \right)$

Exercice 44 [sujet] 1. Si $\varphi = -\alpha^2 < 0$ alors $y(t) = ae^{\alpha t} + be^{-\alpha t}$; si $\varphi = 0$ alors $y(t) = at + b$ et si $\varphi = \omega^2 > 0$ alors $y(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$.

2. fg et g sont continues donc F et G sont \mathcal{C}^1 et $\left(\frac{F}{G}\right)'(t) = \frac{g(t)(f(t) - F(t))}{G(t)} \leq 0$. On a donc $\frac{F(t)}{G(t)} \leq \frac{F(0)}{G(0)} = M$ ce qui donne le résultat en réutilisant $f(t) \leq F(t)$.

3. a) On a $z(t) = -t \int_a^t y(u)\varphi(u) du + \int_a^t uy(u)\varphi(u) du$ donc $z''(t) = -\varphi(t)y(t) = y''(t)$ et on a bien $z(t) = y(t) + \alpha t + \beta$

b) On a $\left|\frac{y(t)}{t}\right| \leq \frac{|\alpha t + \beta|}{t} + \int_a^t \left(1 - \frac{u}{t}\right) |y(u)\varphi(u)| du$. Puis $\frac{|\alpha t + \beta|}{t} \leq |\alpha| + \frac{|\beta|}{a} = M$ sur $[a, +\infty[$ (car $a > 0$) et $\int_a^t \left(1 - \frac{u}{t}\right) |y(u)\varphi(u)| du \leq \int_a^t |y(u)\varphi(u)| du = \int_a^t \left|\frac{y(u)}{u}\right| \times u|\varphi(u)| du$. On peut donc appliquer **2**, ce qui donne $\left|\frac{y(t)}{t}\right| \leq M \exp\left(\int_a^t |u\varphi(u)| du\right) \leq M \exp\left(\int_a^{+\infty} u|\varphi(u)| du\right)$.

Exercice 45 [sujet] 1. C-Lip

2. $g(x) = f(x) \left(\int_0^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^2} - \int_0^x \frac{dt}{f(t)^2} \right)$; il suffit de vérifier que $h(x) = f(x) \int_0^x \frac{dt}{f(t)^2}$ est solution : $h'(x) = f'(x) \int_0^x \frac{dt}{f(t)^2} + \frac{1}{f(x)}$ puis $h''(x) = f''(x) \int_0^x \frac{dt}{f(t)^2} = (1+x^4)h(x)$

3. Si f s'annule sur \mathbb{R}^+ , par continuité de f , on a $f(\alpha) = 0$ et $f > 0$ sur $[0, \alpha[$; on en déduit $f'' \geq 0$ sur $[0, \alpha[$ donc $f' \geq 1 > 0$ donc $f \geq f(0) = 1$ ce qui est absurde. Ainsi $f > 0$ sur \mathbb{R}^+ donc $f'' \geq 0$ puis $f' \geq f'(0) = 1$ donc $f(x) \geq x + f(0) = x + 1$ donc $0 \leq \frac{1}{f(x)^2} \leq \frac{1}{(1+x)^2}$ est donc intégrable sur \mathbb{R}^+ .

Exercice 46 [sujet] Existence de α et β faite en cours.

Si $z = y_2/y_1$ alors $z' = \frac{w}{y_1^2}$ avec $w = y_1'y_2 - y_1y_2'$ puis $w' = (a_2 - a_1)y_1y_2$. Si on suppose $y_2 > 0$ sur $] \alpha, \beta [$ (donc ≥ 0 sur $[\alpha, \beta]$), on a $w' > 0$ sur $] \alpha, \beta [$ donc $w(\alpha) < w(\beta)$, ce qui est absurde car $w(\alpha) = y_1'(\alpha)y_2(\alpha) \geq 0$ et $w(\beta) = y_1'(\beta)y_2(\beta) \leq 0$

Exercice 47 [sujet] 1. Si $f'(x_0) = 0$ alors f est solution de (\mathcal{E}) avec $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, problème dont la fonction nulle est aussi solution; d'après C-Lip, on en déduirait $f = 0$. f est alors strictement croissante au voisinage de x_0 .

2. On pose $x_1 = \inf\{x > x_0, f(x) = 0\}$ (existe : partie de \mathbb{R} non vide et minorée par x_0), par continuité de f , on vérifie $f(x_1) = 0$ et avec **1**, $x_1 \geq x_0 + \alpha > x_0$.

3. Si $f > 0$ sur $]x_0, x_1[$ alors $f'(x_1) < 0$ mais $f'' = -pf \geq 0$ donc f' croît, ce qui est absurde.

Exercice 48 [sujet] Si f s'annulait au moins deux fois, on trouve (cf cours) $\alpha < \beta$ tels que $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ et $f > 0$ sur $] \alpha, \beta [$ (ou < 0); on a alors $f'' = -qf \geq 0$ donc f' croît de $f'(\alpha) \geq 0$ (car si $f'(\alpha) < 0$, avec $f(\alpha) = 0$, on aurait $f < 0$ à droite de α) à $f(\beta) \leq 0$ (même raisonnement) donc $f' = 0$ sur $[\alpha, \beta]$. On aurait donc f solution de $y'' + qy = 0$ avec $y(\alpha) = y'(\alpha) = 0$ donc $y = 0$ avec C-Lip, ce qui est absurde

Exercice 49 [sujet] 1. Si y est bornée, $|y''(x)| \leq \|y\|_\infty \frac{x}{1+x^3}$ donc y'' est intégrable sur \mathbb{R}^+ , puis $y'(x) = y'(0) + \int_0^x y''(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l = y'(0) + \int_0^{+\infty} y''(t) dt$. Si $l \neq 0$, par le TAF, on prouve que y n'est pas bornée (si $l > 0$, on a $y' \geq \frac{1}{2}l$ pour $t \geq t_0$) donc $l = 0$.

2. Soit (f, g) une base de solutions de (\mathcal{E}) (par C-Lip), on vérifie $w' = 0$ donc $w = \alpha$. Si on suppose que f et g sont bornées alors f' et g' tendent vers 0 en $+\infty$ par **1** et on en déduit $w = f'g - fg' \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $\alpha = 0$ et $w = 0$, ce qui est incompatible avec le fait que (f, g) soit libre.

Exercice 50 [sujet] 1. Comme $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont solutions de (\mathcal{E}_0) , on cherche y_p sous la forme $y_p(x) = \alpha(x)e^x + \beta(x)e^{-x}$ avec $\alpha'(x)e^x + \beta'(x)e^{-x} = 0$; on trouve $\alpha'(x) = f(x)e^x$ et $\beta'(x) = -f(x)e^{-x}$. Les solutions de (\mathcal{E}) sont donc $y(x) = ae^x + be^{-x} + e^x \int_0^x f(t)e^{-t} dt - e^{-x} \int_0^x f(t)e^t dt$. On en déduit $\beta = f(0)$ et $\alpha = e^{-1} \int_0^1 f(t) \operatorname{sh}(1-t) dt$. α et β sont bien uniques.

2. On a $|\alpha e^x| \leq \int_0^1 |f(t)| \operatorname{sh}(1-t) dt \leq \operatorname{sh}(1) \|f\|_\infty$ puis $|\beta e^{-x}| \leq |f(0)| \leq \|f\|_\infty$ et $\left| e^x \int_0^x f(t)e^{-t} dt - e^{-x} \int_0^x f(t)e^t dt \right| \leq e \|f\|_\infty + \|f\|_\infty$ donc $\|\phi(f)\|_\infty \leq (\operatorname{sh}(1) + 1 + e) \|f\|_\infty$ donc ϕ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$.