TD24 : Équations différentielles

Exercice 1 (CCINP PSI 2022)

Soit $(\mathcal{E}) : xy' + \lambda y = \frac{1}{1+x}$ avec $\lambda > 0$

1. Résoudre l'équation homogène sur $\mathbb{R}^{+*}$
2. Donner la forme générale des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ à l'aide d'une intégrale
3. Montrer qu'il existe une unique solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ bornée au voisinage de 0.

Exercice 2 (CCP PSI 2017)

Résoudre $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = -2x + y + z \\ z' = -2x + 3y - z \end{cases}$

Exercice 3 (CCP PSI 2015)

Soit l'équation différentielle $(E) : x^{(3)} = 5x'' - 7x' + 3x$. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \end{pmatrix}$.

1. Trouver $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X' = AX$.
2. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ puis trouver les solutions de (E) .

Exercice 4 (CCINP PSI 2022)

Soit $(E_0) : x^2 y'' - 2y = 0$

1. Déterminer les solutions polynômiales de (E_0) .
2. Résoudre (E_0) sur $\mathbb{R}^{+*}$ en posant $y(x) = x^2 z(x)$.
3. Résoudre (E_0) sur $\mathbb{R}^+$.
4. Résoudre $x^2 y'' - 2y = x^3$

Exercice 5 (Centrale PSI 2019)

1. Rappeler le DSE de arctan
2. Soit $(E) : (1+x^2)y'' - 2y = 0$
 - a) Trouver une solution polynômiale de (E) .
 - b) Trouver une solution DSE (non polynômiale) de (E) .
 - c) Résoudre (E)

Exercice 6 (EIVP PSI 2017)

Résoudre $y'' + \frac{1}{t^2}y = 0$ en posant $t = e^x$. En déduire les solutions de $f'(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$.

Exercice 7 (Centrale PSI 2019)

Soit $(E) : y'' + \varphi(t)y = 0$ où φ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

1. Résoudre (E) dans le cas où φ est constante.
2. Soient f et g continues sur $[a, +\infty[$, g positive, telle que $\forall t \in [a, +\infty[$, $f(t) \leq M + \int_a^t f(u)g(u) du$.

On pose $F(t) = M + \int_a^t f(u)g(u) du$ et $G(t) = \exp\left(\int_a^t g(u) du\right)$.

En calculant la dérivée de $\frac{F}{G}$, montrer que $\forall t \in [a, +\infty[$, $f(t) \leq M \exp\left(\int_a^t g(u) du\right)$.

3. On suppose que $t \mapsto t\varphi(t)$ est intégrable sur $[a, +\infty[$.
 - a) Soit y une solution de (E) . Justifier qu'il existe une fonction affine A telle que $y(t) = A(t) - \int_a^t (t-u)y(u)\varphi(u) du$.
indication : poser $z(t) = -\int_a^t (t-u)y(u)\varphi(u) du$ et calculer z'' .
 - b) En déduire que $t \mapsto \frac{y(t)}{t}$ est bornée sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$