Correction TD24 : Équations différentielles

Exercice 2 **(CCP PSI 2017)**

Résoudre $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = -2x + y + z \\ z' = -2x + 3y - z \end{cases}$

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et on résout $X'(t) = AX(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. On diagonalise A en $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(0, 2, -2)$ puis, en posant $X(t) = PY(t)$, on a $X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow X'(t) = PDP^{-1}X(t) \Leftrightarrow Y(t) = DY(t)$. On décompose $Y(t)$ et $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ et le système vérifié par $Y(t)$ devient $\begin{cases} y_1'(t) = 0 \\ y_2'(t) = 2y_2(t) \\ y_3'(t) = -2y_3(t) \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} y_1(t) = \alpha \\ y_2(t) = \beta e^{2t} \\ y_3(t) = \gamma e^{-2t} \end{cases}$ Reste à reconstruire le vecteur $X(t)$: $X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta e^{2t} \\ \gamma e^{-2t} \end{pmatrix}$

Exercice 4 **(CCINP PSI 2022)**

Soit $(E_0) : x^2y'' - 2y = 0$

1. Déterminer les solutions polynômiales de (E_0).

2. Résoudre (E_0) sur $\mathbb{R}^{+*}$ en posant $y(x) = x^2z(x)$.

3. Résoudre (E_0) sur $\mathbb{R}^+$.

4. Résoudre $x^2y'' - 2y = x^3$

---

1. Comme vu en TD, les solutions polynômiales sont de la forme $y(x) = \alpha x^2$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

2. On pose, sur $\mathbb{R}^{+*}$ (ou $\mathbb{R}^{-*}$), $z(x) = \dfrac{y(x)}{x^2}$; ainsi, si y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ alors z aussi. Réciproquement, $y(x) = x^2z(x)$ donc si z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ alors y aussi.
On a ensuite $y''(x) = 2z(x) + 4xz'(x) + x^2z''(x)$ donc $x^2y''(x) - 2y(x) = x^4z''(x) + 4x^3z'(x)$. Ainsi y est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}^{+*}$ (ou $\mathbb{R}^{-*}$) si et seulement si z est solution de $xz'(x) + 4z'(x) = 0$ (équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par z'). On en déduit $z'(x) = \alpha e^{-4\ln|x|} = \dfrac{\alpha}{x^4}$ puis $z(x) = \dfrac{-\alpha}{3x^3} + \beta$ donc $y(x) = ax^2 + \dfrac{b}{x}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

3. La limite de y en 0^+ n'est finie que si $b = 0$. Il reste alors $y(x) = ax^2$ qui est bien une solution sur $\mathbb{R}^+$ (car dérivable en 0) et même sur $\mathbb{R}$ entier d'après la première question.

4. On vérifie que $x \mapsto x^3$ est une solution « évidente » de (E) donc les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$ de (E) sont $y(x) = ax^2 + \dfrac{b}{x} + x^3$. Sur $\mathbb{R}$, on a $y(x) = \begin{cases} ax^2 + \dfrac{b}{x} + x^3 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ cx^2 + \dfrac{d}{x} + x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ Une telle fonction n'est continue en 0 que si $b = d = 0$; dans ce cas $y'(x) = \begin{cases} 2ax + 3x^2 & \text{si } x > 0 \\ 2cx + 3x^2 \text{si } x < 0 \end{cases}$ qui donne $\lim\limits_{0^+} y' = 0 = \lim\limits_{0^-}$ donc y est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $y'(0) = 0$. Reste la dérivabilité seconde de y en 0 : $\dfrac{y'(x) - y'(0)}{x} = \begin{cases} 2a + 3x & \text{si } x > 0 \\ 2c + 3x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ donc y est deux fois dérivable en 0 si et seulement si $a = c$. Au final les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont définies par

$$y(x) = ax^2 + x^3 \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

Exercice 5 **(Centrale PSI 2019)**

1. Rappeler le DSE de arctan

2. Soit $(E) : (1 + x^2)y'' - 2y = 0$

a) Trouver une solution polynômiale de (E).

b) Trouver une solution DSE (non polynômiale) de (E).

c) Résoudre (E)

---

1. Pour $|x|<1$, on a $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

2. a) On vérifie que $x \mapsto 1+x^2$ est une solution ; on pourrait par ailleurs prouver que les solutions polynômiales non nulles de (E) sont nécessairement de degré 2 puis qu'elles sont de la forme $y(x) = a(1+x^2)$

b) Si $y(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ avec $R>0$ alors

$$\begin{aligned}
(1+x^2)y''(x) - 2y(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^2 - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^2 - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&\overset{p=n-2}{=} \sum_{p=0}^{+\infty} (p+2)(p+1)a_{p+2}x^p + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^2 - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)[(n+2)a_{n+2} + (n-2)a_n]x^n
\end{aligned}$$

donc y est solution sur $]-R,R[$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = -\frac{n-2}{n+2} a_n$. On a donc $a_4 = 0$ puis $a_{2p} = 0$ pour $p \geqslant 2$ (et $a_2 = a_0$ donc $x \mapsto a_0 + a_2 x^2 = a_0(1+x^2)$ redonne les solutions polynômiales) et avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, on a $a_{2p+1} = \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)(2p-1)}$ et $a_{2p} = 0$. On vérifie $R = 1$ et, pour $|x|<1$, avec $a_{2p+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^p}{2p+1} - \frac{(-1)^p}{2p-1}\right)$, on a

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} x^{2p+1} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p-1} x^{2p+1}\right) = \frac{1}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p-1} x^{2p+1} - x\right) \\
&\overset{p=n+1}{=} \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+3} + \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + \frac{x}{2} \\
&= \frac{1+x^2}{2}\arctan(x) + \frac{x}{2}
\end{aligned}$$

c) La fonction $x \mapsto (1+x^2)\arctan(x) + x$ n'est DSE que sur $]-1,1[$ mais est $\mathcal{C}^\infty$ et solution sur $\mathbb{R}$ (vérification facile en dérivant deux fois). Comme $x \mapsto \frac{2}{1+x^2}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$, le théorème de C-Lip s'applique donc l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est un plan ; $x \mapsto 1+x^2$ et $x \mapsto (1+x^2)\arctan(x) + x$ sont libres donc les solutions sur $\mathbb{R}$ sont $y : x \mapsto \alpha(1+x^2) + \beta((1+x^2)\arctan(x) + x)$

Exercice 6 (EIVP PSI 2017)

Résoudre $y'' + \frac{1}{t^2} y = 0$ en posant $t = e^x$. En déduire les solutions de $f'(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$.

Le changement de variable est défini par $\left.\begin{array}{c} t = e^x \\ x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = \ln(t) \\ t \in \mathbb{R}^{+*} \end{array}\right.$ Si on pose $z(x) = y(e^x)$ et si y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ alors z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$; réciproquement, $y(t) = z(\ln t)$ donc si z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ alors y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On pose $y(t) = z(\ln t)$, on a alors $y'(t) = \frac{1}{t} z'(\ln t)$ et $y''(t) = -\frac{1}{t^2} z'(\ln t) + \frac{1}{t^2} z''(\ln t)$ donc $y''(t) + \frac{1}{t^2} y(t) = \frac{1}{t^2}(z''(\ln t) - z'(\ln t) + z(\ln t))$. On en déduit que y est sol de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ de $z''(x) - z'(x) + z(x) = 0$ donc $z(x) = e^{x/2}\left(a\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + b\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ puis $y(t) = \sqrt{t}\left(a\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t) + b\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$

Si f est solution alors $f'(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. On en déduit f est solution si et seulement si f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f''(t) = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^2} f(t)$ avec $f'(1) = f(1)$. Ainsi f est solution de la première équation avec $a = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} b$

Exercice 7 **(Centrale PSI 2019)**
Soit $(E) : y'' + \varphi(t)y = 0$ où φ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

1. Résoudre (E) dans le cas où φ est constante.

2. Soient f et g continues sur $[a, +\infty[$, g positive, telle que $\forall t \in [a, +\infty[, f(t) \leqslant M + \displaystyle\int_a^t f(u)g(u)\,\mathrm{d}u$.

On pose $F(t) = M + \displaystyle\int_a^t f(u)g(u)\,\mathrm{d}u$ et $G(t) = \exp\left(\displaystyle\int_a^t g(u)\,\mathrm{d}u\right)$.

En calculant la dérivée de $\dfrac{F}{G}$, montrer que $\forall t \in [a, +\infty[, f(t) \leqslant M\exp\left(\displaystyle\int_a^t g(u)\,\mathrm{d}u\right)$.

3. On suppose que $t \mapsto t\varphi(t)$ est intégrable sur $[a, +\infty[$.

a) Soit y une solution de (E). Justifier qu'il existe une fonction affine A telle que $y(t) = A(t) - \displaystyle\int_a^t (t-u)y(u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u$.

indication : poser $z(t) = -\displaystyle\int_a^t (t-u)y(u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u$ *et calculer* z''.

b) En déduire que $t \mapsto \dfrac{y(t)}{t}$ est bornée sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$

---

1. On distingue selon le signe de φ :
— Si $\varphi = 0$ les solutions sont $y : t \mapsto at + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
— Si $\varphi > 0$, on écrit $\varphi = \omega^2$ et les solutions sont $y : t \mapsto a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$
— Si $\varphi = -\omega^2 < 0$ les solutions sont $y : t \mapsto ae^{\omega t} + be^{-\omega t}$

2. fg et g sont continues sur $[a, +\infty[$ donc F et G sont $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et $\left(\dfrac{F}{G}\right)'(t) = \dfrac{F'(t)G(t) - F(t)G'(t)}{G(t)^2}$ donc $\left(\dfrac{F}{G}\right)'(t) = \dfrac{f(t)g(t)G(t) - F(t)g(t)G(t)}{G(t)^2} = \dfrac{g(t)\big[f(t) - F(t)\big]}{G(t)} \leqslant 0$ car $g \geqslant 0$ et on a supposé $f(t) \leqslant F(t)$. La fonction $\dfrac{F}{G}$ est donc décroissante sur $[a, +\infty[$. Comme $\dfrac{F(a)}{G(a)} = M$, on a $\dfrac{F(t)}{G(t)} \leqslant M$ ce qui donne $F(t) \leqslant MG(t)$ puis le résultat demandé avec $f(t) \leqslant F(t)$.

3. a) On pose $z(t) = -\displaystyle\int_a^t (t-u)y(u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u = -t\int_a^t y(u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u + \int_a^t uy(u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u$ (*on ne peut pas justifier la dérivabilité de z sous la première forme*). Comme, $u \mapsto y(u)\varphi(u)$ et $u \mapsto uy(u)\varphi(u)$ sont continues sur $[a, +\infty[$, z est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et $z'(t) = -\displaystyle\int_a^t y(u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u - ty(t)\varphi(t) + ty(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^t y(u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u$. On en déduit que z' est dérivable et $z''(t) = -y(t)\varphi(t) = y''(t)$ car y est solution de (E). On en déduit donc qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $z(t) = y(t) - \alpha t - \beta$ donc $\boxed{y(t) = \alpha t + \beta - \displaystyle\int_a^t (t-u)y(u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u}$

b) On pose $f(t) = \left|\dfrac{y(t)}{t}\right|$ et $g(t) = |t\varphi(t)|$ (positive) et on applique la question **2** : comme $a > 0$, si $t \in [a, +\infty[$ alors $t > 0$ et on a $f(t) \leqslant |\alpha| + \dfrac{|\beta|}{t} + \displaystyle\int_a^t \frac{|t-u|}{t} f(u)u|\varphi(u)|\,\mathrm{d}u \leqslant |\alpha| + \frac{|\beta|}{a} + \int_a^t f(u)g(u)\,\mathrm{d}u$ car si $u \in [a, t]$ alors $0 \leqslant \dfrac{t-u}{t} \leqslant 1$.

On déduit donc de **2**, avec $M = |\alpha| + \dfrac{|\beta|}{a}$, $f(t) \leqslant M\exp\displaystyle\int_a^t g(u)\,\mathrm{d}u \leqslant M\exp\int_a^{+\infty} g(u)\,\mathrm{d}u$ puisque g est positive et intégrable sur $[a, +\infty[$.