Oral TD2 : réduction des endomorphismes

Exercice 1 (CCP PSI 2018)
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = P(A)$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(P) \geqslant 1$ et $P(0) = 1$. Montrer que A est inversible et en déduire que A et B commutent.

Exercice 2 (CCINP PSI 2022)
Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de X^2P par $X^4 - 1$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$

2. Montrer que φ est diagonalisable et donner ses éléments propres

3. Calculer $\mathrm{Tr}(\varphi)$ et $\det(\varphi)$.

Exercice 3 (CCINP PSI 2022)
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ n & & & \end{pmatrix}$

1. Déterminer $\mathrm{rg}(A)$ et $\dim(\ker(A))$

2. Justifier que A est DZ

3. Montrer que A possède 3 valeurs propres : 0, λ et $1 - \lambda$ avec $\lambda > 1$.

4. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 3.

Exercice 4 (CCINP PSI 2022)
Soient E un espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$ ayant n valeurs propres distinctes et $Z_u = \{v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u\}$

1. Montrer que Z_u est un espace vectoriel

2. Montrer que si $v \in Z_u$ alors $E_\lambda(u)$ est stable par v

3. Donner $\dim(E_\lambda(u))$ et en déduire que les vecteurs propres de u sont aussi des vecteurs propres de v

4. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont diagonales puis déterminer $\dim(Z_u)$

Exercice 5 (CCINP PSI 2022)
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f^2) \oplus \ker(f - 2id)$.

2. Déterminer un vecteur de $\ker(f^2)$ qui n'appartient pas à $\ker(f)$.

3. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Soit g tel que $g^2 = f$. Montrer que $\ker(f^2)$ est stable par g. Que peut-on en déduire ?

Exercice 6 (CCINP PSI 2022)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le rang de B en fonction du rang de A.

2. Déterminer $\mathcal{X}_B$ en fonction de $\mathcal{X}_A$. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de A et B ?

3. Montrer que si A est inversible et admet n valeurs propres distinctes alors B est diagonalisable.

4. B est-elle diagonalisable si A n'est plus supposée inversible ?

5. Si B est diagonalisable, montrer que A l'est aussi.

6. Si A est diagonalisable, montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est inversible.