Oral TD3 : séries et intégrabilité

Exercice 1 **(Mines-Ponts PSI 2018)**
Soit $u_n = \left(\sqrt{n^2+an+2} - \sqrt{n^2+bn+1}\right)^n$; nature de $\sum u_n$ en fonction de a et b.

Exercice 2 **(Mines-Télécom PSI 2023)**
Soit $u_n = \dfrac{1+2^2+\cdots+n^n}{n^n}$

1. Trouver une relation entre u_n et u_{n+1}

2. En déduire une majoration de u_n

3. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite

Exercice 3 **(Mines-Télécom PSI 2023)**

Soient $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum \rho_n$ diverge et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \rho_k$.

1. Montrer que $\sum \dfrac{\rho_n}{S_n}$ diverge.

2. Montrer que $\sum \dfrac{\rho_n}{S_n^2}$ converge.

Exercice 4 **(CCINP PSI 2021)**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}}{2}$ pour $n \geqslant 0$

1. Montrer que $u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{a_n}{2}$.

2. En déduire que si $\sum a_n$ converge alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3. La réciproque est-elle vraie ? On pourra utiliser $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

Exercice 5 **(Mines-Ponts PSI 2018)**
Soit $\alpha > 0$; étudier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{\sin^2 t}{t^\alpha}\right) - 1\right) \mathrm{d}t$ en fonction de α.

Exercice 6 **(Mines-Ponts PSI 2021)**
Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \,\mathrm{d}t$

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donner la valeur de $f'(x)$.

2. Donner des équivalents de f en 0 et $+\infty$.
indications : en 0, examiner $f(x) - \displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et en $+\infty$, commencer par une IPP.

3. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
indication : pour le calcul, IPP à nouveau

Exercice 7 **(Mines-Télécom PSI 2022)**
Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\sin^2 x} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\sin^2 x}$ puis montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}$

2. Montrer que le série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3\sin^2 x}$ converge.

3. $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^3\sin^2 x}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^+$?