Corrigé TD3 : séries et intégrabilité

Exercice 7 **(Mines-Télécom PSI 2022)**
Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\sin^2 x} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\sin^2 x}$ puis montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}$

2. Montrer que le série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3\sin^2 x}$ converge.

3. $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^3\sin^2 x}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^+$?

---

1. On pose $t = \pi - x$ (changement de variable affine) dans $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\sin^2 x}$ et, avec $\sin(\pi - t) = \sin(t)$, on trouve $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\sin^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\sin^2 x}$, ce qui donne le premier résultat.
Pour calculer cette intégrale, on pose $u = \tan(x) \Leftrightarrow x = \arctan u$: arctan est une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ donc, avec $\sin^2(\arctan u) = \dfrac{u^2}{1+u^2}$,

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\sin^2 x} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\sin^2 x} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2+a^2u^2} = 2\left[\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1+a^2}}\right)\right]_{u=0}^{u=+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}$$

2. On commence par poser $x = n\pi + u$ pour ramener l'intervalle d'intégration à $[0,\pi]$ et on trouve, avec $\sin(n\pi+u) = (-1)^n\sin(u)$, $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+(n\pi+u)^3\sin^2 u}$ donc $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+(n\pi)^3\sin^2 u} = \frac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^3}} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc $\sum u_n$ est ACV

3. Il faut commencer par comprendre le pb : $\sum u_n$ converge signifie que $S_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} u_k = \int_0^{(N+1)\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ admet une limite finie alors que, par définition, comme $f \geqslant 0$, f intégrable sur $\mathbb{R}^+$ signifie que $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$. Pour illustrer le pb, si on avait $f = \cos$, on aurait $u_n = 0$ donc $\sum u_n$ serait CV mais $F(x) = \sin(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$. La caractérisation séquentielle de la limite pour F demanderait d'examiner $F(x_n)$ pour <u>toutes</u> les suite x_n tendant vers $+\infty$ et pas seulement le cas $x_n = (n+1)\pi$ qui donne $F(x_n) = S_n$.
Ici $f \geqslant 0$ permet de montrer l'intégrabilité en majorant F : si $x \in \mathbb{R}^+$ alors il existe N tel que $x \leqslant (N+1)\pi$ donc $F(x) \leqslant F((N+1)\pi) = S_n \leqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (qui est bien une constante). F est majorée sur $\mathbb{R}^+$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Ceci étant justifié, la relation de Chasles permet ensuite d'écrire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ (mais cette égalité n'aurait pas de sens si l'intégrale était divergente).