Oral TD4 : suites et séries de fonctions

Exercice 1 (CCINP PSI 2023)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sin\left(nxe^{nx^2}\right)$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers une fonction F à déterminer.

2. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur tout segment $[a,1]$ avec $a \in]0,1[$.

3. En considérant $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$, que dire de la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sur $[0,1]$?

Exercice 2 (CCINP PSI 2023)

Soient $\alpha > 0$ et $f_\alpha : t \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin^\alpha t \cos^n t$.

1. Étudier la convergence simple de la série.

2. Pour $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donner une expression simple de $f_\alpha(t)$ et étudier la convergence uniforme de la série.

3. Pour quelles valeurs de α, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ converge-t-elle ?

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha t \cos^n t\,\mathrm{d}t$.

a) Pour quelles valeurs de α, la série $\sum u_n(\alpha)$ converge-t-elle ?

b) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(3)$.

Exercice 3 (Mines-Ponts PSI 2022)

On donne $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2x^2}$.

1. Domaine de définition et continuité de f.

2. Donner la limite ℓ de $f(x)$ quand $x \to +\infty$ puis un équivalent de $f(x) - \ell$.

3. Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

Exercice 4 (CCINP PSI 2023)

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$

1. Donner le domaine de définition D de f

2. Montrer que f est dérivable sur D

3. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1 ; on pourra faire une comparaison série/intégrale et utiliser $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice 5 (CCINP PSI 2023)

Soit $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$.

1. Montrer que (a_n) converge

2. Étudier la série $\sum (-1)^n a_n$

3. On considère la série $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R et soit f sa somme.

a) Montrer que $a_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire la valeur de R.

c) Montrer que a_n vérifie la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ (2n+3)a_{n+1} = (n+1)a_n + 1$.

d) Montrer que f vérifie une équation différentielle d'ordre 1 à déterminer.