Corrigé TD5 : suites et séries de fonctions

Exercice 6 **(Centrale PSI 2021)**

On admet l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$

2. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = I$ et déterminer la limite en $+\infty$ de f.

3. a) Montrer que $I = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+k\pi}\,\mathrm{d}u$

b) Montrer que f n'est pas continue en 0

---

1. Par IPP, pour $x > 0$, avec $u(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$ et $v'(t) = \sin(xt)$ donc $u'(t) = \dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$ et $v(t) = \dfrac{-\cos(xt)}{x}$: on a $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ et $u(t)v(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $f(x)$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ converge, ce qui est le cas car $u'(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$; $f(0) = 0$ existe et f est impaire

2. Le théorème de continuité ne s'applique pas au voisinage de 0 car I n'est pas absolument convergente (donc $t \mapsto g(x,t)$ n'est pas intégrable). Pour $x > 0$, en posant $t = ux$, on trouve $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xu)}{u}\,\mathrm{d}u$ et $f(x) - I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-\sin(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$. On en déduit $|f(x) - I| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xt}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.

En $+\infty$, on peut reprendre l'expression de f obtenue après IPP : $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1-t^2)\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ donc $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{x}\left(1 + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|1-t^2|}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (on aurait aussi pu utiliser le TCDPC avec cette expression de $f(x)$).

3. a) $I \overset{\text{Chasles}}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ puis poser $t = k\pi + u$ et utiliser $\sin(k\pi + u) = (-1)^k \sin(u)$

b) Par CSSA, on prouve $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+\pi}\,\mathrm{d}t + R_1 \geqslant \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+\pi}\,\mathrm{d}t > 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = I > 0$ et $f(0) = 0$ donc f n'est pas continue à droite en 0.