Oral TD6 : espaces euclidiens

Exercice 1 **(Mines-Ponts PSI 2022)**

Soient $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ et $\phi(f,g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E.
2. Calculer $\|\arcsin\|$
3. Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} \frac{(\arcsin t - at - b)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$

Exercice 2 **(Centrale PSI 2023)**

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Pour $P, Q \in E$, on note : $\Phi(P,Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que Φ définit un produit scalaire sur E.
2. On note $(P_0,\dots,P_n)$ l'orthonormalisée de Gram-Schmidt pour la base canonique de E. Calculer $P_i(0)$ pour $i \in [\![0,n]\!]$ (on pourra s'intéresser à $\Phi(P_i, P_i')$).
3. On note $F = \{P \in E \,/\, P(0) = 0\}$. Calculer la distance de 1 à F.

Exercice 3 **(CCINP PSI 2023)**

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(M^\top M)^2 = I_n$.

1. Montrer que M est inversible.
2. Montrer que M est symétrique.
3. Montrer que $M = I_n$.

Exercice 4 **(CCINP PSI 2022)**

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille libre de E, espace préhilbertien, telle que $\forall x \in E, \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(e_i|x)^2$

1. Montrer que, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $\|e_i\| \leqslant 1$.
2. Soit x un vecteur unitaire et orthogonal à $\mathrm{Vect}\{e_1,\dots,e_{n-1}\}$. Calculer $(x|e_n)^2$ et en déduire $\|e_n\|$.
3. Montrer que $(a_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de E.

Exercice 5 **(Mines-Ponts PSI 2022)**

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Soit $\alpha > 0$.

1. Le produit de matrices carrées symétriques est-il symétrique ?
2. Montrer que $I_n + \alpha A$ est inversible.
3. Montrer que $M = (I_n - \alpha A)(I_n + \alpha A)^{-1}$ est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(M) \subset]-1,1]$.

Exercice 6 **(Mines-Ponts PSI 2023)**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique de valeurs propres $\lambda_1(A) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(A)$. On note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ R_A(X) = \dfrac{\langle AX, X\rangle}{\langle X, X\rangle}$

Soit $k \in [\![1,n]\!]$ et G_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k.

On note $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]\,, Ae_i = \lambda_i(A)e_i$.

1. Montrer que : $\forall X \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k) \setminus \{0\},\ R_A(X) \in [\lambda_1(A), \lambda_k(A)]$
2. Montrer que : $\lambda_k(A) = \displaystyle\min_{V \in G_k}\left(\max_{X \in V\setminus\{0\}} R_A(X)\right)$
3. Soient A et B deux matrices symétriques réelles. En déduire que : $\lambda_1(A) + \lambda_k(B) \leqslant \lambda_k(A+B) \leqslant \lambda_n(A) + \lambda_k(B)$.

Exercice 7 **(Mines-Ponts PSI 2022)**

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle, montrer que $\mathrm{Tr}(AA^T) > 0$
2. Soit $S \in \mathcal{E}$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^T A$
3. Soit $(S,S') \in \mathcal{E}^2$. Montrer $\mathrm{Tr}(SS') > 0$