Oral TD8 : probabilités

Exercice 1 **(CCINP PSI 2021)**
Soient $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = J - I_3$. On note A, B et C trois points du plan sur lesquels une puce peut se déplacer ; si elle est sur un point à un instant, elle saute de façon équiprobable sur l'un des deux autres à l'instant suivant. On note A_n l'événement « la puce est en A à l'instant n » (recip. B_n et C_n en B et en C) et $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$

1. Trouver une relation entre U_{n+1} et U_n.
2. Diagonaliser M et en déduire une expression de M^n
3. Trouver un polynôme annulateur de J et en déduire une autre expression de M^n.
4. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Exercice 2 **(CCINP PSI 2022)**
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une variable aléatoire discrète X sur $[\![0, n]\!]$ telle que $P(X = k) = \dfrac{a}{k+1}\dbinom{n}{k}$.

1. Trouver α, dépendant de k et n, tel que $\dbinom{n}{k} = \alpha \dbinom{n-1}{k-1}$.
2. En déduire la valeur de a pour laquelle on peut définir une telle variable aléatoire discrète X.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 3 **(CCINP PSI 2022)**
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$ tels que

$$P(X = k, Y = n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k} p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de Y.
2. Montrer que $\dfrac{1}{(1-x)^{k+1}} = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \dbinom{n}{k} x^{n-k}$ pour $|x| < 1$ et en déduire la loi de X
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 **(Mines-Ponts PSI 2018)**
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $Z = |X - Y|$. Montrer que Z est une variable aléatoire discrète , déterminer sa loi et son espérance.

Exercice 5 **(CCINP PSI 2022)**
La secrétaire d'une société appelle les n clients de cette société. Elle joint chaque client, indépendamment les uns des autres avec une probabilité $p \in]0, 1[$. On note X le nombre de clients joints lors de ce premier appel. Elle rappelle alors les $n - X$ clients qu'elle n'a pas pu joindre. Elle joint chacun d'entre eux avec la probabilité p et on note Y le nombre de clients joints lors de ce deuxième appel. On note Z le nombre de clients joints au cours des deux appels et $q = 1 - p$.

1. Quelle est la loi de X ? Donner $E(X)$ et $V(X)$
2. Quelles sont les valeurs prises par Z ?
3. Déterminer $P(Z = 0)$ et montrer que $P(Z = 1) = np(1 + q)q^{2n-2}$
4. Calculer $P(Y = h | X = k)$
5. Montrer que $\dbinom{n}{k}\dbinom{n-k}{j-k} = \dbinom{n}{j}\dbinom{j}{k}$ puis $P(Z = j) = \dbinom{n}{j} q^{2n-2j}(1 - q^2)^j$.
   Quelle est la loi de Z ?

Exercice 6 **(Mines-Télécom PSI 2023)**
Un pion se déplace sur une droite : il se déplace d'un cran vers la droite avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et vers la gauche avec la probabilité $1 - p$. À l'instant initial, il est à l'origine du repère et on note X_n sa position après n déplacements.

1. Que vaut $X_n(\Omega)$?
2. On note D_n le nombre de déplacements vers la droite au cours des n premiers instants. Relier X_n à D_n.
3. Déterminer les lois de D_n et X_n.

4. Calculer l'espérance de X_n.

Exercice 7 **(Mines-Ponts PSI 2023)**

Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{B}\left(\dfrac{2}{3}\right)$. On définit les événements $A_k = (X_{2k-1}X_{2k}=0)$, $B_p = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{p} A_k$ et la variable aléatoire discrète $T = \min\{k \geqslant 2, X_{k-1} = X_k = 1\}$

1. Montrer que $P\left(\overline{\displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k}\right) = 1$ et en déduire $P(T \in \mathbb{N}) = 1$

2. Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite $(P(T=n))_{n\in\mathbb{N}}$

3. Déterminer l'espérance de T

Exercice 8 **(Centrale PSI 2021)**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Justifier l'existence et calculer $E\left(e^{x\left(S_n - \frac{n}{2}\right)}\right)$, où $x \in \mathbb{R}^+$.

2. a) Soient $\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ et $f(x) = \alpha x - \ln \operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Justifier que f admet sur $\mathbb{R}^{+*}$ un maximum $M_\alpha > 0$.

b) Montrer que $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - \dfrac{1}{2}\right| \geqslant \alpha\right) \leqslant 2e^{-nM_\alpha}$