Oral TD9 : calcul différentiel et géométrie

Exercice 1 **(Mines-Ponts PSI 2022)**
Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $(E) : y''-9y=3a|x|+b$

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer qu'il existe une unique solution admettant des asymptotes en $\pm\infty$.

Exercice 2 **(Mines-Ponts PSI 2022)**
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, α et β deux fonctions réelles dérivables sur I. On définit le wronskien $w : I\to\mathbb{R}$ de (α,β) par $\forall t\in I, w(t)=\begin{vmatrix}\alpha(t) & \beta(t)\\ \alpha'(t) & \beta'(t)\end{vmatrix}$

1. Montrer que si φ et ψ sont deux solutions de $(E) : y''=ay'+by$ avec $a,b : I\to\mathbb{R}$ continues alors le wronskien w de (φ,ψ) vérifie une équation différentielle d'ordre 1.

2. Si φ ne s'annule pas sur I, calculer $\left(\dfrac{\psi}{\varphi}\right)'$ en fonction de w et φ.

3. Trouver une solution développable en série entière de $(E) : 2xy''+y'-y=0$ telle que $\varphi(0)=1$.

4. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 **(CCINP PSI 2022)**
Soit $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \partial_1 g(x,y)+\partial_2 g(x,y)=0$. On pose $h(u,v)=f(\alpha u+\beta v,\beta u-\alpha v)$ avec $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$.

1. Calculer $\partial_1 h(u,v)$

2. Trouver (α,β) tels que $h(u,v)=\varphi(v)$ avec $\varphi\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

3. Déterminer g

Exercice 4 **(ENSEA PSI 2021)**
Soit $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3xy^3-x^3y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$; f est-elle $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5 **(Centrale PSI 2022)**
Soit Γ l'arc paramétré par $x(t)=\cos^3 t$ et $y(t)=\sin^3 t$ pour $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$; on note $M(t)$ le point de Γ de paramètre $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. La longueur de l'arc entre les points $M(t_1)$ et $M(t_2)$ (avec $t_1<t_2$) est $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\|f'(u)\|\,du$ où $f : t\mapsto(x(t),y(t))$ et $\|\ \|$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer la longueur de Γ

Soit $n\in\mathbb{N}$; on définit les points $M_0,\dots,M_n$ par $M_0=M(0)$, $M_n=M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ et de sorte que les longueurs de tous les arcs M_kM_{k+1} soient égales.

2. Déterminer $u_n=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} OM_k$ où O est l'origine du repère

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 6 **(Centrale PSI 2023)**
Soient $D=(\mathbb{R}^+)^2$ et f définie sur D par $f(x,y)=\dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$

1. Montrer que f est continue sur D.

2. Montrer que f est majorée sur D.

3. Soit $K=[0,10]^2$. Montrer que f admet un maximum sur K puis sur D.

4. Déterminer $\max\limits_{D}(f)$.