Intégration sur un intervalle de $\mathbb{R}$

La notation $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des nombres réels, soit le corps des nombres complexes. On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points distincts.

I Rappels sur les fonctions

1. Relations de comparaison

Dans ce paragraphe, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ (contenant au moins 2 points distincts) et a un point de I *adhérent* à I, ie soit un point de I, soit une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).
Une propriété P est satisfaite « au voisinage de a » si P est vraie sur un intervalle de la forme

- $I \cap]a-h, a+h[$, pour un réel $h > 0$, si a est un réel (ie $a \neq \pm\infty$).
- $[A, +\infty[$ si $a = -\infty$, pour un réel $A > 0$.
- $]-\infty, A]$ si $a = -\infty$, pour un réel $A < 0$.

Définition : Soient f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que :

1. f et g sont **équivalentes** en a, noté $f \underset{a}{\sim} g$ s'il existe une fonction h telle que

$$f = h \times g, \text{ au voisinage de } a \text{ et } \lim_{x \to a} h(x) = 1$$

2. f est **négligeable** devant g en a, noté $f \underset{a}{=} o(g)$ s'il existe une fonction ε telle que

$$f = \varepsilon \times g, \text{ au voisinage de } a \text{ et } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

3. f est **dominée** par g en a, noté $f \underset{a}{=} O(g)$ s'il existe une fonction h telle que

$$f = h \times g, \text{ au voisinage de } a \text{ et } h \text{ est bornée en } a$$

Remarque(s) :

(I.1) On a $x \underset{x \to 0}{\sim} \sin(x)$ mais il n'existe pas de fonction h, définie sur $\mathbb{R}$ entier, telle que $x = h(x)\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (une telle égalité n'est possible que au voisinage de 0).

(I.2) On a donc $f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow f \underset{a}{=} O(g)$ et $f \underset{a}{=} o(g) \Rightarrow f \underset{a}{=} O(g)$; les autres implications sont fausses.

(I.3) $f \underset{a}{=} o(1)$ signifie que f tend vers 0 en a et $f \underset{a}{=} O(1)$ signifie que f est bornée en a.

(I.4) L'utilisation d'un O, au lieu d'un o, peut permettre « d'économiser » le calcul d'un terme dans un développement limité :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{x^{k-1}} + \underbrace{\frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^k}\right)}_{= O\left(\frac{1}{x^k}\right)}$$

Montrer que $\left(\cos \frac{1}{x}\right)^{x^2} \underset{+\infty}{=} e^{-1/2} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Propriété [I.1] **:** Si g ne s'annule pas au voisinage de a, on a les équivalences suivantes :

1. $f \underset{a}{\sim} g$ si et seulement si $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{g} = 1$
2. $f \underset{a}{=} o(g)$ si et seulement si $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{g} = 0$
3. $f \underset{a}{=} O(g)$ si et seulement si $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

Remarque(s) :

I.5 Pour montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, il faut donc prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0$.

I.6 Pour montrer que $f(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, il faut donc prouver que $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} f(x) = 0$.

Attention :

— *Ne pas supprimer les constantes multiplicatives dans les équivalents :* $\dfrac{1+2x}{4+x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{x}$.

— *Seule la fonction nulle (au voisinage de a) est équivalente à 0 ; faire attention aux cas particulier dans les équivalents avec un paramètre : équivalent de* $\dfrac{1+\alpha x}{1+x^2}$ *quand x tend vers $+\infty$?*

Propriété [I.2] **: (Croissances comparées)**

1. En $+\infty$
   a) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$ donc $(\ln x)^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$.
   b) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-\lambda x} = 0$ donc $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{\lambda x}\right)$.
2. En 0
   Si $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln(x) = 0$ donc $\ln(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$

Exemple(s) :

I.7 Vérifier $\left(1 - \dfrac{1}{\ln(x)}\right)^{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

Propriété [I.3] **:**

1. Soient f et g deux fonctions. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors
   - f et g sont de même nature en a. Si elles convergent alors $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a} g$.
   - f et g sont de même signe au voisinage de a.
   - f et g s'annulent en même temps au voisinage de a.
2. Règles de calcul sur les équivalents : si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors
   - $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$ (*produit d'équivalents*)
   - si f_2 ne s'annule pas au voisinage de a alors $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$ (*quotient d'équivalents*).
3. On a l'équivalence $f \underset{a}{\sim} g$ si et seulement si $f \underset{a}{=} g + o(g)$

Remarque(s) :

I.8 La réciproque de la première propriété est en général fausse : si $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a} g$ est finie et non nulle alors $f \underset{a}{\sim} g$.

I.9 Deux fonctions équivalentes n'ont pas forcément la même monotonie.

I.10 Ne pas faire de somme d'équivalents !

I.11 Ne pas composer un équivalent par une fonction ! La dernière propriété permet de remplacer un équivalent par une égalité afin de la composer par une fonction.
Si $f \underset{a}{\sim} g$, $f > 0$ au voisinage de a et si $\lim\limits_{a} f$ existe dans $[0, 1[\cup]1, +\infty]$ alors $\ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)$.

I.12 La dernière propriété permet aussi de déterminer un équivalent à l'aide d'un DL.

2. Intégration

Si : $I \to \mathbb{K}$ et $(a, b) \in I^2$, il suffit que f soit continue sur l'intervalle I pour que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe ; cela signifie en fait que pour qu'une intégrale existe, il suffit que la fonction f soit continue sur le segment d'intégration $[a, b]$ (ou $[b, a]$).

Théorème [I.4] : Soit f continue sur l'intervalle I et $a \in I$ un point de I. La fonction F_a définie sur I par

$$F_a : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a. On a donc

$$F_a \in \mathcal{C}^1(I) \text{ et } \forall x \in I, F_a'(x) = f(x)$$

Remarque(s) :

I.13 Il faut être précis dans l'utilisation de ce résultat :
- Lorsqu'on s'intéresse à l'ensemble de définition de F_a (ie l'existence de $F_a(x)$ pour un réel x fixé), la continuité de f sur le segment $[a, x]$ (ou $[x, a]$) suffit.
- Par contre, lorsqu'on s'intéresse à la dérivabilité de F_a, c'est la continuité de f sur tout l'intervalle I qui compte (*donc l'intervalle ne doit pas dépendre du paramètre x*).

Conséquence [I.5] : Si $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue sur I alors
1. F_a est $\mathcal{C}^1$ sur I et $F_a' = f$ (ne dépend donc pas de la valeur de a).
2. f admet des primitives sur I.

Exemple(s) :

I.14 Trouver des conditions « raisonnables » pour que $g(x) = \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit dérivable sur un intervalle I et calculer sa dérivée.

Propriété [I.6] : Si f est continue sur I, intervalle contenant 0, et admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right)$$

et si F est une primitive de f sur I. Alors F admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$:

$$F(x) \underset{0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o\left(x^{n+1}\right)$$

Remarque(s) :

I.15 Cela signifie que l'on peut « intégrer terme à terme » un DL (et que la précision de ce DL augmente) sans hypothèse particulière.

I.16 On ne peut par contre pas dériver un DL sans justification : on peut avoir f dérivable sur I, qui admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ sans que f' n'ait de DL.

Exemple(s) :

I.17 Trouver le $\mathrm{DL}_3(1)$ de $f_1(x) = \arccos\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$.

(I.18) Trouver le $\mathrm{DL}_4(+\infty)$ de $f_2(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \ln(x)$.

(I.19) Trouver les $\mathrm{DL}_n(0)$ de $g_1(x) = \ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$ et $g_2(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$

(I.20) Étudier $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{ch}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Propriété [I.7] : (Formule de Taylor)
Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et $(a,b) \in I^2$ alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Conséquence [I.8] : (Inégalité de Taylor-Lagrange)
Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et $(a,b) \in I^2$ alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$$

Remarque(s) :

(I.21) $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a,b]$ donc $\sup\limits_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$ existe et en fait un maximum.

(I.22) Si $a > b$, la « bonne » notation serait en fait $\sup\limits_{[b,a]} |f^{(n+1)}|$.

II Intégration sur un segment des fonctions continues par morceaux

1. Fonctions continues par morceaux sur un segment

Définition : Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$.

1. Une **subdivision de** $[a,b]$ est une famille de réels $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ telle que

$$x_1 = a, x_p = b, \text{ et } \forall i \in [\![1, p-1]\!], x_i < x_{i+1}$$

2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$. On dit que f est **continue par morceaux sur** $[a,b]$ s'il existe une subdivision $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$, on a

$$f \text{ est continue sur }]x_i, x_{i+1}[\quad \underline{\text{et}} \quad \lim_{x_i^+} f \text{ et } \lim_{x_{i+1}^-} f \text{ existent}$$

La subdivision $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est alors appelée subdivision adaptée à f.
On note $\mathcal{CM}^0([a,b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Remarque(s) :

(II.1) On dit qu'une subdivision de $[a,b]$ $(y_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ est plus fine qu'une autre subdivision $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de $[a,b]$ si $\{x_1, \ldots, x_p\} \subset \{y_1, \ldots, y_q\}$.

(II.2) Si $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $(y_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ sont deux subdivisions de $[a,b]$, il existe une subdivision de $[a,b]$ plus fine que $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et plus fine que $(y_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$.

(II.3) Si $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à $f \in \mathcal{CM}^0([a,b], \mathbb{K})$, alors toute subdivision de $[a,b]$ plus fine que $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est aussi adaptée à f.

(II.4) f est continue par morceaux sur $[a,b]$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$, la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$ se prolonge en une fonction continue sur $[x_i, x_{i+1}]$: pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$, la fonction

$$\widetilde{f}_i : x \in [x_i, x_{i+1}] \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]x_i, x_{i+1}[\\ \lim\limits_{x_i^+} f & \text{si } x = x_i \\ \lim\limits_{x_{i+1}^-} f & \text{si } x = x_{i+1} \end{cases} \quad \text{est continue sur } [x_i, x_{i+1}].$$

Exemple(s) :

(II.5) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} - 1 & \text{si } x \in]0,1] \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ x\sin(1/x) & \text{si } x \in [-1,0[\end{cases}$ alors $f \in \mathcal{CM}^0([-1,1])$.

(II.6) $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \begin{cases} e^{-1/x} - 1 & \text{si } x \in [-1,0[\\ 2 & \text{si } x = 0 \\ x\sin(1/x) & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}$ alors $g \notin \mathcal{CM}^0([-1,1])$.

Propriété [II.1] :

1. $\mathcal{CM}^0([a,b],\mathbb{K})$ un sous espace vectoriel, stable par produit, de $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$, ie

$$\forall (f,g) \in \mathcal{CM}^0([a,b],\mathbb{K})^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \alpha f + \beta g \in \mathcal{CM}^0([a,b],\mathbb{K}) \text{ et } fg \in \mathcal{CM}^0([a,b],\mathbb{K})$$

2. Si f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ alors f est bornée sur $[a,b]$.

3. $f \in \mathcal{CM}^0([a,b],\mathbb{C})$ si et seulement si $(\mathrm{Re}(f),\mathrm{Im}(f)) \in \mathcal{CM}^0([a,b],\mathbb{R})^2$

Attention : Même si f, continue par morceaux sur $[a,b]$ est bornée, f peut ne pas avoir de maximum ou de minimum ; c/ex : $f(x) = x$ sur $]0,1[$ et $f(0) = f(1) = 1/2$.

2. Intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment

Définition [II.2] : Soient $f \in \mathcal{CM}^0([a,b],\mathbb{K})$, $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une subdivision adaptée à f. On définit **l'intégrale de f sur** $[a,b]$ par

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=1}^{p-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \widetilde{f_i}(t)\,\mathrm{d}t$$

où $\widetilde{f_i}$ est le prolongement par continuité de $f_{|_{]x_i,x_{i+1}[}}$ au segment $[x_i,x_{i+1}]$.
La valeur de cette intégrale est indépendante de la subdivision $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ adaptée à f.

Remarque(s) :

(II.7) Si f est continue sur $[a,b]$, on retrouve la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété [II.3] : (Linéarité)

$$\forall (f,g) \in \mathcal{CM}^0([a,b],\mathbb{K})^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \int_{[a,b]} \alpha f + \beta g = \alpha \int_{[a,b]} f + \beta \int_{[a,b]} g$$

L'application $f \in \mathcal{CM}^0([a,b],\mathbb{K}) \mapsto \displaystyle\int_{[a,b]} f$ est une fome linéaire sur $\mathcal{CM}^0([a,b],\mathbb{K})$

Propriété [II.4] : (Relation de Chasles)
Soient $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ et $c \in]a,b[$.
On a $f \in \mathcal{CM}^0([a,b],\mathbb{K})$ si et seulement si $f_{|_{[a,c]}} \in \mathcal{CM}^0([a,c],\mathbb{K})$ et $f_{|_{[c,b]}} \in \mathcal{CM}^0([c,b],\mathbb{K})$ et dans ce cas

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f_{|_{[a,c]}} + \int_{[c,b]} f_{|_{[c,b]}}$$

Propriété [II.5] :

1. Si $f \in \mathcal{CM}^0([a,b],\mathbb{K})$ est nulle sauf en un nombre fini de points de $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$.

2. Si $(f,g) \in \mathcal{CM}^0([a,b],\mathbb{K})^2$ sont égales sauf en un nombre fini de points de $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$.

Propriété [II.6] : (Cas particulier des fonctions à valeurs réelles)

1. Si $f \in \mathcal{CM}^0([a,b],\mathbb{R})$ et $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$.

2. Si $(f,g) \in \mathcal{CM}^0([a,b],\mathbb{R})^2$ et $f \leqslant g$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.

3. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est **continue** sur $[a,b]$, $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$ si et seulement si $f = 0$.

Remarque(s) :

(II.8) On rappelle que pour ces propriétés on a supposé $a < b$.

Propriété [II.7] : Si $f \in \mathcal{CM}^0([a,b],\mathbb{K})$ alors $|f| \in \mathcal{CM}^0([a,b],\mathbb{R})$ et

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f| \leqslant (b-a) \times \sup_{[a,b]} |f|$$

Remarque(s) :

(II.9) Le nombre $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$ s'appelle la valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

3. Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est **continue par morceaux sur** I si pour tout segment $[a,b] \subset I$, la restriction de f à $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.
On note $\mathcal{CM}^0(I,\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Remarque(s) :

(II.10) Une fonction continue par morceaux sur I possède un nombre fini de discontinuités sur tout segment de I mais peut avoir une infinité de discontinuités sur I : ex $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ sur $\mathbb{R}$.

(II.11) Une fonction continue par morceaux sur I est bornée sur tout segment de I mais pas sur I : $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exemple(s) :

(II.12) La fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

(II.13) Étude de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x\lfloor 1/x \rfloor$:

a) Montrer que f est continue par morceaux sur $]0,1]$.

b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

c) f est-elle continue par morceaux sur $[0,1]$?

Propriété [II.8] :

1. $\forall (f,g) \in \mathcal{CM}^0(I,\mathbb{K})^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \alpha f + \beta g \in \mathcal{CM}^0(I,\mathbb{K})$

2. $\forall (f,g) \in \mathcal{CM}^0(I,\mathbb{K})^2, fg \in \mathcal{CM}^0(I,\mathbb{K})$

<u>Attention</u> : L'inverse d'une fonction continue par morceaux qui ne s'annule pas peut ne pas être continue par morceaux ; c/ex : $f : x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \in \mathcal{CM}^0([0,1],\mathbb{R})$ *mais* $\dfrac{1}{f}$ *n'est pas continue par morceaux sur* $[0,1]$.
La composée de deux fonctions continues par morceaux peut ne pas être continue par morceaux ; c/ex : $g : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{1}{x}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^{+*}$, $f([0,1]) \subset \mathbb{R}^{+*}$ *mais* $g \circ f = \dfrac{1}{f}$ *n'est pas continue par morceaux sur* $[0,1]$.

<u>Définition</u> : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{CM}^0(I,\mathbb{K})$ et $(a,b) \in I^2$, on pose

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \displaystyle\int_{[a,b]} f & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ \displaystyle -\int_{[b,a]} f & \text{si } a > b \end{cases}$$

<u>Propriété</u> [II.9] : (Linéarité de l'intégrale)

$$\forall (f,g) \in \mathcal{CM}^0(I,\mathbb{K})^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (a,b) \in I^2, \int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

donc $f \in \mathcal{CM}^0(I,\mathbb{K}) \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire.

<u>Propriété</u> [II.10] : (Relation de Chasles)
Soient $f \in \mathcal{CM}^0(I,\mathbb{K})$ et $(a,b,c) \in I^3$, on a

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

<u>Propriété</u> [II.11] : (Positivité de l'intégrale pour les fonctions à valeurs réelles)

1. Soient $f \in \mathcal{CM}^0(I,\mathbb{R})$ positive sur I et $(a,b) \in I^2$. Si <u>$a \leqslant b$</u> alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

2. Si $(f,g) \in \mathcal{CM}^0(I,\mathbb{R})^2$, $f \leqslant g$ sur I <u>et si $a \leqslant b$</u>, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

<u>Attention</u> : Ne surtout pas oublier l'hypothèse $a \leqslant b$ dans ces propriétés !

<u>Propriété</u> [II.12] : Si $f \in \mathcal{CM}^0(I,\mathbb{K})$ alors $|f| \in \mathcal{CM}^0(I,\mathbb{R})$ et

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t\right|$$

<u>Remarque(s) :</u>

II.14 Si on a de plus $a \leqslant b$ alors cette inégalité devient $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$

Propriété [II.13] : (Inégalité de la moyenne)
Si $f \in \mathcal{CM}^0(I, \mathbb{K})$, $(a, b) \in I^2$ et si f est bornée sur I alors

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant |b - a| \times \sup_I |f|$$

Théorème [II.14] : (Changement de variable)
Soient $f \in \mathcal{CM}^0(I, \mathbb{K})$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$ bijective et strictement monotone sur J telle que $\varphi(J) \subset I$ et $(\alpha, \beta) \in J^2$. Alors $\varphi' \times f \circ \varphi$ est continue par morceaux sur J et on a

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \varphi'(u) \times f \circ \varphi(u)\,\mathrm{d}u$$

Remarque(s) :

(II.15) Si φ est continue sur J alors φ est bijective si et seulement si φ est strictement monotone mais l'énoncé du programme impose les deux notions.

(II.16) Si φ est seulement $\mathcal{C}^1$ et $f \in \mathcal{CM}^0$, il se peut que $f \circ \varphi \times \varphi'$ ne soit par $\mathcal{CM}^0$; l'hypothèse φ bijective et strictement monotone est donc indispensable dans le cas où f n'est que $\mathcal{CM}^0$. Si $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ et $\varphi(x) = x^4 \dfrac{\sin(1/x)}{\sin 1}$ pour $x \neq 0$ et $\varphi(0) = 0$, sur $[-1, 1] = \varphi([-1, 1])$ par exemple.

(II.17) Pour ne pas se tromper entre φ et φ^{-1} (qui pourrait ne pas être $\mathcal{C}^1$), il suffit d'écrire le changement de variable dans le sens $t = \varphi(u)$, ce qui est nécessaire pour ensuite remplacer « $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ ».

Exemple(s) :

(II.18) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta}$ en posant $u = \tan\dfrac{\theta}{2}$.

(II.19) Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ en posant $u = x + \sqrt{1 + x^2}$.

III Intégration sur un intervalle quelconque

1. Cas d'une demi-droite $[a, +\infty[$

Définition : Soit f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.

- Si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, on dit que **l'intégrale généralisée** (ou impropre) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** et on pose

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **diverge**.

Remarque(s) :

(III.1) Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux et $c \geqslant a$. Les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. De plus, si elles convergent alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

(III.2) Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$, égales au voisinage de $+\infty$, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

(*III.3*) Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs complexes alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si les deux intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t$ convergent.

Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t + i\int_a^{+\infty} \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t$.

Exemple(s) :

(*III.4*) Justifier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t+t^2)}$ et calculer sa valeur.

(*III.5*) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Alors la fonction $F : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto -\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$; de plus F est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}^+$ qui tend vers 0 en $+\infty$.

(*III.6*) Soient $f \in \mathcal{CM}^0([a,+\infty[,\mathbb{K})$ et $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante positive qui tend vers $+\infty$.

Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

La réciproque est fausse ; c/ex : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \cos(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Propriété [III.1] : Soient $(\alpha,\lambda)\in\mathbb{R}^2$.

1. (Intégrales de Riemann) : L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\lambda > 0$.

Remarque(s) :

(*III.7*) **(Lien entre convergence de l'intégrale de f et limite de la fonction f)**

Soit f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$. Il n'y a <u>aucun lien</u> entre la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et le fait que f admette une limite en $+\infty$

- $t\mapsto \dfrac{1}{t}$ tend vers 0 en $+\infty$ mais $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge
- si $f = \displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f_n$, où $f_n(x) = \begin{cases} n^4(x-n+1/n^3) & \text{si } x\in[n-1/n^3,n] \\ -n^4(x-n-1/n^3) & \text{si } x\in[n,n+1/n^3] \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge mais f n'est pas bornée au voisinage de $+\infty$.

Le seul résultat valable est le suivant : si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge <u>et si</u> f admet une limite ℓ (finie ou non) en $+\infty$ alors nécessairement, on a $\ell = 0$.

Propriété [III.2] : Soit f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ <u>à valeurs positives</u>.

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si la fonction } x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ est majorée sur } [a,+\infty[.$$

Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$.

Remarque(s) :

(*III.8*) Il suffit en fait que f soit positive au voisinage de $+\infty$.

(*III.9*) On a un résultat analogue si f est négative au voisinage de $+\infty$: l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est minorée sur $[a,+\infty[$.

(III.10) La propriété précédente est fausse si f n'est pas de signe fixe au voisinage de $+\infty$; c/ex : cos.

Conséquence [III.3] : Soient f et g continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ et telles que $0 \leqslant f \leqslant g$.

$$\text{Si } \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \underline{\text{alors}} \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

Remarque(s) :

(III.11) Par contraposée, sous les mêmes hypothèses, si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

(III.12) Pour montrer la convergence de l'intégrale d'une fonction positive, on peut chercher à majorer la fonction ; pour prouver sa divergence, il faut chercher à minorer la fonction.

2. Intégrales convergentes

Définition : (Cas d'un intervalle semi-ouvert)

1. Soit f continue par morceaux sur $[a,b[$ avec $a \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers b, on dit que **l'intégrale généralisée** (ou impropre) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** et on définit
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

2. Soit f continue par morceaux sur $]a,b]$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $a < b$ et $b \in \mathbb{R}$. Si $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers a, on dit que **l'intégrale généralisée** (ou impropre) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** et on définit
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Remarque(s) :

(III.13) Soit $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux et $c \in [a,b[$. Les deux intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. De plus, si elles convergent alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

(III.14) Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$, égales au voisinage de b, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

(III.15) Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$ et à valeurs complexes alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si les deux intégrales $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t$ convergent.
Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t$.

Propriété [III.4] **:** Soient $(\alpha,\lambda)\in\mathbb{R}^2$.

1. **(Intégrales de Riemann) :** L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha<1$.
2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Remarque(s) :

III.16 Par translation, $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{(u-1)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha<1$, de même que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(1-u)^\alpha}$.

III.17 **(Lien entre convergence de l'intégrale de f et limite de la fonction f)**
Soit f continue par morceaux sur $[a,b[$. Si $[a,b[$ est un intervalle borné ($b\neq+\infty$) et si f a une limite finie en b alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Mais on peut avoir $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergente avec f non bornée sur $[a,b[$; ex : $t\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ sur $]0,1]$.

Définition [III.5] **: (Cas d'un intervalle ouvert)**
Soit f continue par morceaux sur $]a,b[$ avec $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $a<b$ et $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** s'il existe $c\in]a,b[$ tel que les deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. On pose alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

La valeur de cette intégrale et sa nature sont indépendantes de $c\in]a,b[$.
Si $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge pour un réel $c\in]a,b[$, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **diverge**

Remarque(s) :

III.18 L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est divergente pour toute valeur de α.

III.19 Cela signifie que si f est continue par morceaux sur $]a,b[$, l'étude de la convergence de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ se fait en deux temps : on choisit $c\in]a,b[$ quelconque et on étudie la convergence des deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

III.20 Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Par contre, si $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, on ne peut pas conclure que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente ; c/ex : $\displaystyle\int_{-x}^{x} t\,\mathrm{d}t=0$.

Propriété [III.6] **:** Soient $f\in\mathcal{C}^0(]a,b[,\mathbb{R})$ et F une primitive de f sur $]a,b[$. Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si F admet des limites finies en a et b.
Dans ce cas, on a

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\big[F(t)\big]_a^b=\lim_{t\to b}F(t)-\lim_{t\to a}F(t)$$

Exemple(s) :

III.21 Justifier la convergence et calculer la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Propriété [III.7] **:** Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$, avec $a < b \leqslant +\infty$, à valeurs positives. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si la fonction } x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ est majorée sur } [a, b[.$$

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$.

Remarque(s) :

(III.22) Il suffit en fait que f soit positive au voisinage de b.

(III.23) On a un résultat analogue si f est négative au voisinage de b : l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est minorée sur $[a, b[$.

(III.24) De même, si f est $\mathcal{CM}^0$ sur $]a, b]$ et positive alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.

3. Propriétés des intégrales convergentes

Propriété [III.8] **: (Linéarité de l'intégrale)**

Soient $(f, g) \in \mathcal{CM}^0(I, \mathbb{K})^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Si les deux intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t$ est convergente et on a

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque(s) :

(III.25) On peut avoir $\displaystyle\int_a^b (f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t$ convergente avec $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ divergente ; c/ex : $f = -g = id_{\mathbb{R}}$.
Si $\displaystyle\int_a^b (f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t$ converge alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Propriété [III.9] **: (Positivité de l'intégrale)**

1. Soit $f \in \mathcal{CM}^0(I, \mathbb{R})$ positive telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Alors on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$

2. Soient $(f, g) \in \mathcal{CM}^0(I, \mathbb{R})^2$ telles que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Si $f \leqslant g$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

Attention : Avec les notations adoptées dans ce paragraphe, on a toujours $a \leqslant b$

Propriété [III.10] : (Relation de Chasles)
Soit $f \in \mathcal{CM}^0(I,\mathbb{K})$ telle que $\displaystyle\int_I f$ converge. Si $(\alpha,\beta,\gamma) \in (I \cup \{a,b\})^3$ alors les trois intégrales $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_\alpha^\gamma f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\gamma^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et on a

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\gamma f(t)\,\mathrm{d}t + \int_\gamma^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque(s) :

(III.26) Si $\alpha > \beta$, on pose $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_\beta^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété [III.11] : (Intégration par parties)
Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$. Si la fonction $f \times g$ admet des limites finies en a et en b alors les deux intégrales $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
Si on suppose de plus que les intégrales convergent alors on a

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f \times g\Big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque(s) :

(III.27) La notation $\Big[f \times g\Big]_a^b$ désigne $\lim\limits_b (f \times g) - \lim\limits_a (f \times g)$

Propriété [III.12] : (Changement de variable)
Soient $f \in \mathcal{CM}^0(]a,b[,\mathbb{K})$ et $\varphi :]\alpha,\beta[\longrightarrow]a,b[$ une bijection strictement monotone de la classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\alpha,\beta[$. Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u) \times |\varphi'(u)|\,\mathrm{d}u$ sont de même nature.
De plus, si ces intégrales convergent, on a

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u) \times |\varphi'(u)|\,\mathrm{d}u$$

Exemple(s) :

(III.28) Justifier la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^3}$ et la calculer en posant $t = \tan\theta$.

IV Fonctions intégrables

Notation : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a = \inf(I)$, $b = \sup(I)$ et f une fonction continue par morceaux sur I. L'intégrale (convergente ou divergente) de f sur I est notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_I f$

Définition : Soit f une fonction continue par morceaux sur I. On dit que f est **intégrable sur** I (ou que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente) si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.
On note $L^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Remarque(s) :

(IV.1) Si f est continue par morceaux sur $[a,b[$ et positive au voisinage de b (ou négative), alors f est intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

(IV.2) Si f est continue par morceaux sur $[a,b[$ et $c \in [a,b[$ alors f est intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si f est intégrable sur $[c,b[$. On parle donc de fonction **intégrable en** b.

(IV.3) Il faut bien connaître cette définition et comprendre, par exemple, la différence entre une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$:
- si f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ alors f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (ou tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^+$)
- $x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ mais pas sur $\mathbb{R}^+$.

Propriété [IV.1] : (Exemples de référence)

1. $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.
2. $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.
3. $t \mapsto e^{-\lambda t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $\lambda > 0$.
4. ln est intégrable sur $]0,1]$.

Exemple(s) :

(IV.4) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^z}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) > 1$

(IV.5) La fonction $t \mapsto e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Propriété [IV.2] :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{|x-a|^\alpha}$ est intégrable en a si et seulement si $\alpha < 1$.
2. Pour $a \in \mathbb{R}$, on a équivalence entre les trois propriétés
   i) f est intégrable en a^+
   ii) $x \mapsto f(a+x)$ est intégrable en 0^+
   iii) $x \mapsto f(a-x)$ est intégrable en 0^-

Propriété [IV.3] : Soit f continue par morceaux sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors f est intégrable sur I si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont intégrables sur I.

Théorème [IV.4] : Soient f continue par morceaux sur I, $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$.

Si f est intégrable sur I alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$

Remarque(s) :

(IV.6) Pour prouver qu'une intégrale de f converge, le plus souvent, on prouvera que la fonction f est intégrable ; il est alors inutile de s'intéresser au signe de la fonction f.

Par contre lorsque l'on souhaite prouver que $\displaystyle\int_a^b f$ diverge, avec $f \in \mathcal{CM}^0([a,b[)$, on montrera en général que f n'est pas intégrable sur $[a,b[$ mais il est indispensable de préciser que f est de signe fixe (au moins au voisinage de b).

Exemple(s) :

(IV.7) Si $z \in \mathbb{C}$ alors $g_z : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) > 0$. Si $\mathrm{Re}(z) > 0$ alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} g_z = \frac{1}{z}$.

Théorème [IV.5] **: (Théorème de comparaison)**
Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I.

1. On suppose que : $|f| \leqslant g$ (donc g à valeurs réelles positives).

$$\underline{\text{Si}}\ g \text{ est intégrable sur } I\ \underline{\text{alors}}\ f \text{ est intégrable sur } I.$$

2. Si $I = [a, b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (et $a \in I$ donc $a \in \mathbb{R}$)

$$\underline{\text{si}} \quad \left.\begin{array}{c} f \underset{b}{=} O(g) \text{ (ou } f \underset{b}{=} o(g)) \\ \text{et} \\ g \text{ est intégrable sur } [a,b[\end{array}\right\} \underline{\text{alors}}\ f \text{ est intégrable sur } [a,b[.$$

3. Si $I = [a, b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (et $a \in I$ donc $a \in \mathbb{R}$) et si $f \underset{b}{\sim} g$ alors

$$f \text{ est intégrable sur } [a,b[\ \underline{\text{si et seulement si}}\ g \text{ est intégrable sur } [a,b[.$$

Remarque(s) :

(*IV.8*) Si I est un intervalle ouvert $I =]\alpha, \beta[$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, pour étudier l'intégrabilité de f sur $]\alpha, \beta[$, on pourra étudier séparément l'intégrabilité de f sur $]\alpha, c]$ et sur $[c, \beta[$ avec c un point de $]\alpha, \beta[$ (ie sur des intervalles « semi-ouverts »), en appliquant deux fois le théorème de comparaison.

Conséquence [IV.6] **: (Hors-programme sous cette forme)**

1. Si f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et s'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = 0$ alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

2. Si f est continue par morceaux sur $[a, b[$ (avec $b \neq +\infty$) et s'il existe $\alpha < 1$ tel que $\lim\limits_{t \to b} (b-t)^\alpha f(t) = 0$ alors f est intégrable sur $[a, b[$.

Remarque(s) :

(*IV.9*) Ces propriétés ne sont valables que sur des intervalles « semi-ouverts » ; si f est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, on doit à priori étudier les deux côtés (donc utiliser deux fois la propriété précédente).

(*IV.10*) Ces deux propriétés ne sont bien sûr pas des équivalences : $f : t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^2}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ (cf plus bas) mais $t^\alpha f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$ pour tout $\alpha > 1$.

Exemple(s) :

(*IV.11*) **Intégrales de Bertrand** : $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge si et seulement si $\left\{\begin{array}{l} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{array}\right.$.

(*IV.12*) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta < 1$.

(*IV.13*) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin^2\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$ converge.

(*IV.14*) Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{t}}{1+t^2} \mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-\sqrt{t} + \ln(t) \frac{\sin t}{t}\right) \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^\alpha t \, \mathrm{d}t$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Conséquence [IV.7] **:** L'ensemble $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I est un sous espace vectoriel de $\mathcal{CM}^0(I, \mathbb{K})$ sur lequel $f \longmapsto \displaystyle\int_I f$ est une forme linéaire.

Attention : Le produit de deux fonctions intégrables sur I peut ne pas être intégrable sur I ; c/ex : $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ *est intégrable sur* $]0, 1]$ *mais pas* $f \times f$.

Propriété [**IV.8**] **:** Si f est continue, positive et intégrable sur I et si $\displaystyle\int_I f = 0$ alors $f = 0$.

Remarque(s) :

(IV.15) La réciproque de cette propriété est bien sûr vraie

(IV.16) Il existe des fonctions telles que $\displaystyle\int_I f$ converge mais non intégrables sur I ; c/ex : la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si $1 < \alpha < 2$ mais $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $0 < \alpha < 2$.

(IV.17) **IPP et intégrabilité :** si f et g sont $\mathcal{C}^1$ sur I et si fg admet des limites finies aux bornes de I, on peut avoir $f'g$ intégrable sur I et fg' non intégrable sur I : *une IPP ne conserve pas l'intégrabilité des fonctions mais conserve seulement la convergence des intégrales.*

(IV.18) **Changement de variable et intégrabilité :** si f est continue par morceaux sur I, et si $\varphi : J \to I$ est une bijection strictement monotone de classe $\mathcal{C}^1$ alors f est intégrable sur I si et seulement si $f \circ \varphi \times \varphi'$ est intégrable sur J : *un changement de variable conserve l'intégrabilité des fonctions.*

Exemple(s) :

(IV.19) Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ puis la calculer en posant $u = \dfrac{1}{t}$.

(IV.20) Soient $\alpha > -1$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$, décroissante, telle que $t \mapsto t^\alpha f(t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Montrer que $t \mapsto t^{\alpha+1} f'(t)$ et $t \mapsto t^\alpha f(t)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha+1} f'(t)\,\mathrm{d}t = -(\alpha+1) \int_0^{+\infty} t^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t$$