

# Intégrales dépendant d'un paramètre

La notation  $\mathbb{K}$  désigne soit le corps des nombres réels, soit le corps des nombres complexes. On considère  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux points distincts.

## Rappel : intégrales dépendant d'un paramètre entier

### **Théorème [1] : (Théorème de convergence dominée)**

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$  une suite de fonctions. On suppose que :

- ▷ la suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $I$  vers  $f$ .
- ▷ les fonctions  $f_n$  et la fonction  $f$  sont continues par morceaux sur  $I$ .
- ▷ il existe une fonction  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue par morceaux, **indépendante de  $n$**  et intégrable sur  $I$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq \varphi(x)$$

Alors les fonctions  $f_n$  et la fonction  $f$  sont intégrables sur  $I$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I f$$

## I Continuité des intégrales à paramètres

On s'intéresse dans la suite de ce chapitre à des fonctions  $g$ , définies sur un intervalle  $A$  de  $\mathbb{R}$  par

$$g(x) = \int_I f(x, t) dt,$$

où  $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$ . L'intervalle d'intégration  $I$  est donc indépendant de  $x$ .

Tous les théorèmes qui suivent sont des conséquences du théorème de convergence dominée : ils comporteront donc tous une *hypothèse de domination* indispensable !

### **Théorème [1.1] : (Théorème de continuité)**

Soit  $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$ . On suppose que :

- ▷ pour tout  $t \in I$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $A$ .
- ▷ pour tout  $x \in A$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ .
- ▷ il existe une fonction  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue par morceaux, **indépendante de  $x$**  et intégrable sur  $I$  telle que

$$\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction  $g : x \in A \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est continue sur  $A$ .

Remarque(s) :

(I.1) L'hypothèse de domination se prouve en deux temps :

- On commence par déterminer  $\varphi$  **indépendante de  $x$**  telle que  $\forall(x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$ , en n'utilisant pour cela que les symboles  $=$  et  $\leq$ .
- Puis on prouve que  $\varphi$  est continue par morceaux et intégrable sur  $I$ , en utilisant en général le théorème de comparaison (donc des symboles  $\sim, o, O, \dots$ )

**Conséquence [I.2] : (Théorème de continuité avec domination locale)**

Soit  $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$ . On suppose que :

- ▷ pour tout  $t \in I$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $A$ .
- ▷ pour tout  $x \in A$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ .
- ▷ pour tout segment  $[a, b] \subset A$ , il existe une fonction  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue par morceaux, **indépendante de  $x$**  et intégrable sur  $I$  telle que

$$\forall(x, t) \in [a, b] \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction  $g : x \in A \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est continue sur  $A$ .

Remarque(s) :

- (I.2) La conclusion de cette propriété est exactement la même que celle du théorème précédent alors que l'hypothèse de domination sur un segment est plus facile à obtenir ; on utilisera donc cette propriété plutôt que le théorème précédent pour prouver la continuité d'une telle fonction  $g$ .
- (I.3) Dans ces deux propriétés, l'intégrabilité de la fonction dominante  $\varphi$  redonne l'intégrabilité de la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  sur  $I$  donc l'existence de  $g(x)$ .
- (I.4) Dans la conséquence, la fonction dominante  $\varphi$  peut dépendre de  $a$  et  $b$  mais elle doit être **indépendante de  $x$**  (la preuve de cette hypothèse de domination se fait donc à nouveau en deux temps).

**Théorème [I.3] : (Théorème de convergence dominée à paramètre continu)**

Soient  $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$  et  $a$  une **borne de l'intervalle**  $A$ . On suppose que :

- ▷ pour tout  $t \in I, \lim_{x \rightarrow a} f(x, t) = \ell(t)$ .
- ▷ pour tout  $x \in A$ , les fonctions  $t \mapsto f(x, t)$  et  $t \mapsto \ell(t)$  sont continues par morceaux sur  $I$ .
- ▷ il existe une fonction  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue par morceaux, **indépendante de  $x$**  et intégrable sur  $I$  telle que

$$\forall(x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction  $\ell$  est intégrable sur  $I$  et

$$\lim_{x \rightarrow a} \int_I f(x, t) dt = \int_I \ell(t) dt$$

Remarque(s) :

- (I.5) Ce théorème est une extension du TCD où on remplace le paramètre entier  $n$  par un paramètre continu  $x$ .
- (I.6) Ce théorème sert à étudier le comportement de la fonction  $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  aux bornes de son intervalle de définition  $A$ .
- (I.7) Pour appliquer ce théorème,  $a$  doit être **une borne de  $A$**  ce qui implique les deux remarques suivantes :
  - on ne peut pas se placer sur des segments de  $A$  pour trouver une domination.
  - on peut choisir l'intervalle  $A$  en fonction de la borne  $a$  à étudier : si on souhaite étudier la limite en  $+\infty$  de  $g$ , qui est définie sur  $]0, +\infty[$ , on peut se placer sur  $A = [1, +\infty[$  par exemple, ie **UN intervalle dont  $a$  est une borne**.

Exemple(s) :

(I.8) Étudier  $h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}} dt$ .

(I.9) Montrer que  $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

Calculer  $f(x) + f(x+1)$  et en déduire des équivalents de  $f$  en 0 et  $+\infty$ .

## II Dérivation des intégrales à paramètres

### Théorème [II.1] : (Théorème de dérivation)

Soit  $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$ . On suppose que :

- ▷ pour tout  $t \in I$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $A$ .
- ▷ pour tout  $x \in A$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux et intégrable sur  $I$ .
- ▷ pour tout  $x \in A$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ .
- ▷ il existe une fonction  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue par morceaux, **indépendante de  $x$**  et intégrable sur  $I$  telle que

$$\forall (x, t) \in A \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction  $g : x \in A \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $A$  et

$$\forall x \in A, g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

Remarque(s) :

(II.1) Là encore la dominante  $\varphi$  doit être **indépendante de  $x$** .

Attention : Ne pas oublier de vérifier que, pour tout  $x \in A$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t) dt$  est intégrable sur  $I$  (ce qui prouve que la fonction  $g$  est définie sur  $A$ ).

### Conséquence [II.2] : (Théorème de dérivation avec domination locale)

Soit  $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$ . On suppose que :

- ▷ pour tout  $t \in I$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $A$ .
- ▷ pour tout  $x \in A$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux et intégrable sur  $I$ .
- ▷ pour tout  $x \in A$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ .
- ▷ pour tout segment  $[a, b] \subset A$ , il existe une fonction  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue par morceaux, **indépendante de  $x$**  et intégrable sur  $I$  telle que

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction  $g : x \in A \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $A$  et

$$\forall x \in A, g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

Remarque(s) :

(II.2) À nouveau, cette propriété donne la même conclusion que le théorème précédent alors qu'elle est plus facile à appliquer (la domination sur un segment est plus facile à obtenir) ; on appliquera donc plutôt cette propriété pour prouver la classe  $\mathcal{C}^1$  d'une telle fonction  $g$ .

(II.3) L'hypothèse de domination se prouve, comme à chaque fois, en deux temps : d'abord on majore  $|f(x, t)|$  **indépendamment de  $x$**  pour trouver la fonction  $\varphi$ , puis on prouve que  $\varphi$  est intégrable (par comparaison).

Exemple(s) :

(II.4) Calculer  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$ .

(II.5) Calculer, pour  $x \geq 0$ ,  $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+t^2)}{1+t^2} dt$ .

(II.6) Soit  $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} dt$

a) Montrer que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et déterminer  $f'(x)$  pour  $x > 0$ .

b) En déduire la valeur de  $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1} dt$  puis de  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$

**Conséquence [II.3] :** Soient  $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que :

▷ pour tout  $t \in I$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $A$ .

▷ pour tout  $x \in A$  et pour  $0 \leq p \leq k-1$ , les fonctions  $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t)$  sont continues par morceaux et intégrables sur  $I$ .

▷ pour tout  $x \in A$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ .

▷ pour tout segment  $[a, b] \subset A$ , il existe une fonction  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue par morceaux, **indépendante de  $x$**  et intégrable sur  $I$  telle que

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction  $g : x \in A \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $A$  et, pour  $1 \leq p \leq k$ , on a

$$\forall x \in A, g^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t) dt$$

Remarque(s) :

(II.7) La notation  $\frac{\partial^0 f}{\partial x^0}$  désigne en fait la fonction  $f$  elle-même.

(II.8) Cette propriété redonne la propriété précédente (classe  $\mathcal{C}^1$ ) dans le cas  $k = 1$ .

(II.9) Au risque de se répéter : la dominante  $\varphi$  doit être **indépendante de  $x$** , mais elle peut dépendre de  $a, b$  et  $k$ .

Exemple(s) :

(II.10) Étude de la fonction  $\Gamma$  définie par  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ .

(II.11) Transformée de Fourier : soit  $f$  continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  telle que  $x \mapsto x^k f(x)$  soit intégrable sur  $\mathbb{R}$  ( $k \in \mathbb{N}$  fixé).

On pose  $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itx} dt$  (la transformée de Fourier de  $f$ ).

a) La fonction  $\hat{f}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

b) Exemple du calcul de la transformée de Fourier d'un « créneau » et de  $t \mapsto e^{-t^2}$ .

(II.12) Transformée de Laplace : soit  $f$  continue par morceaux sur  $\mathbb{R}^+$  telle  $x \mapsto f(x) e^{-\alpha x}$  soit intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$  fixé).

On pose  $L_f(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$  (la transformée de Laplace de  $f$ )

a) La fonction  $L_f$  est continue sur  $[\alpha, +\infty[$  et  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] \alpha, +\infty[$ .

b) Exemple du calcul de la transformée de Laplace de  $t \mapsto t^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) et  $t \mapsto e^{zt}$  avec  $z \in \mathbb{C}$ .

c) On a  $\lim_{p \rightarrow +\infty} L_f(p) = 0$ .

d) Si  $f$  admet une limite finie en  $+\infty$  alors  $\lim_{p \rightarrow 0^+} p L_f(p) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  (théorème de la valeur finale).