Colles semaine 3

En bref

- Équations cartésiennes et paramétriques de droite dans le plan.
- Équations cartésiennes et paramétriques de cercle dans le plan.
- Définition de cosinus, sinus et tangente. Formule d'addition, de symétrie, de rotation.
- Méthode de linéarisation, par exemple pour le calcul d'intégrale.
- Théorie des ensemble élémentaires : intersection, union, complémentaire.
- Calcul de sommes, notation $\sum$ et notation avec points de suspension.
- Relation de Chasles, de réordonnement, de factorisation, etc.
- Changement d'indice dans les sommes.
- Calcul de sommes arithmétiques ou géométriques
- Sommes télescopiques.
- Identité de factorisation de Bernoulli $a^{n+1} - b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$.
- Généralisation aux produits.
- Définition des factorielles et coefficients du binômes.
- Relations entre les coefficients binomiaux.
- Formule du binôme.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Montrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ pour trois sous-ensemble d'un même ensembles.
- Montrer que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ pour deux sous-ensembles d'un même ensemble.
- Donner une équation paramétrique d'une droite définie par une équation cartésienne ou le contraire.
- Identifier précisément la nature géométrique de l'ensemble d'équation cartésienne $x^2 - 6x + y^2 + 2y = 0$ ou un exemple approchant
- Résoudre l'équation $\cos(2x) = 0$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}$ ou un exemple approchant.
- Calculer $\int_0^{\pi} \cos(t)\cos(2t)$ en linéarisant.
- Donner la formule permettant de calculer $\sum_{k=0}^{n} k$ ou $\sum_{k=0}^{n} k^2$ puis prouver cette formule. *On a vu une preuve par récurrence en cours mais l'étudiant pourra choisir une autre méthode.*
- Donner avec preuve une factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$.
- Définir la quantité $\binom{n}{k}$. Montrer que $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.
- Définir la quantité $\binom{n}{k}$. Montrer que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
- Citer et prouver la formule du binôme.

Note aux colleurs

- Les étudiants ne connaissent pas la fonction arctangente donc ne savent pas primitiver $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$.
- On se limite pour l'instant aux calculs réels, les complexes feront leur apparition la semaine prochaine.
- Idem, on attendra la semaine prochain pour proposer des sommes doubles.

En détail

1 Géométrie élémentaire et trigonométerie

Reprise du programme précédent

2 Théorie des ensembles

2.1 Inclusion et sous-ensembles

Notation 1 (ensemble vide)**.** On note $\emptyset$ l'ensemble vide, c'est-à-dire l'ensemble qui ne contient aucun élément.

Notation 2 (Appartenance)**.** Si E est un ensemble. Alors on note $a \in E$ pour signifier qu'un élément a appartient à l'ensemble E.

Définition 3 (Inclusion)**.** Si E et F sont deux ensembles. On dit que E est inclus dans F et on note $E \subset F$ si tous les éléments de E sont des éléments de F. C'est-à-dire si $\forall x \in E,\ x \in F$.

On appelle encore *sous-ensemble* de F ou *partie* de F un ensemble inclus dans F.

Nous pouvons maintenant écrire notre premier théorème de la théorie des ensembles

Théorème 4. *Si E et F sont deux ensembles, alors ils sont égaux si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.*

Lemme 5 (L'inclusion est transitive)**.** *Si E, F et G sont trois ensembles et si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.*

Définition 6 (Ensemble des parties)**.** Si E est un ensemble, alors on appelle ensemble des parties de E et on note $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble constitué de tous les sous-ensembles de E.

2.2 Unions et intersections

Définition 7 (Intersection)**.** Si A et B sont deux ensembles, on appelle intersection de A et B et on note $A \cap B$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A *et* à B. C'est-à-dire

$$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\} = \{x \in B \mid x \in A\}$$

Définition 8 (Union)**.** Si A et B sont deux ensembles, on appelle union de A et B et on note $A \cup B$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A *ou* à B.

Proposition 9. *Si A et B sont deux ensembles, on a :*

i) $A \subset (A \cup B)$.

ii) $(A \cap B) \subset A$.

Proposition 10 (Distributivité de l'intersection sur l'union et réciproquement)**.** *Soit A, B et C trois ensembles , alors :*

i) $A \bigcup (B \cap C) = (A \cup B) \bigcap (A \cup C)$.

ii) $A \bigcap (B \cup C) = (A \cap B) \bigcup (A \cap C)$.

Proposition 11 (Union, intersection et complémentaire)**.** *Soit A et B deux parties d'un ensemble E, alors :*

i) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

2.3 Produits cartésiens d'ensembles

Définition 12 (Produit cartésien d'ensembles). Si A et B sont deux ensembles, on appelle *produit cartésien* de A et B et on note $A \times B$ l'ensemble des couples constitués d'un élément de A et d'un élément de B. C'est-à-dire que $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$.

De même si n est un entier naturel non nul et A_1 ,A_2, $\dots$, A_n sont des ensembles, on note $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ l'ensemble des n-uplets d'éléments dont le premier est dans A_1, le deuxième est dans A_2, etc.

C'est-à-dire que $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$.

Notation 13 (notation puissance). Si A est un ensemble, on note plus simplement A^2 pour signifier le produit cartésien de A avec A.

De même, si n est un entier naturel non nul, on note $A^n := \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$.

3 Calculs de sommes

3.1 Exemples à connaître

Proposition 14 (Sommes arithmétiques et géométriques). *Pour tout entier naturel n, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \;;\;.$$

Plus généralement si a est une suite arithmétique et n et m deux entiers naturels vérifiant $n \leqslant m$, alors :

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = \frac{(m-n+1)(a_n + a_m)}{2} \;;\;.$$

Pour tout nombre réel q,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

Proposition 15. *Pour tout entier naturel n, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \;;\;.$$

3.2 Règles de calcul

Proposition 16 (Factorisation et développement). *Soit (a_k) et (b_k) deux suites de réels et m et n des entiers naturels vérifiant $m \leqslant n$. Alors :*

i) $\sum\limits_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=m}^{n} a_k + \sum\limits_{k=m}^{n} b_k$.

ii) Soient λ un nombre réel, $l \in \mathbb{N}$, alors,

$$\sum_{k=m}^{n} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + \lambda) = \left(\sum_{k=m}^{n} a_k \right) + (n-m+1)\lambda.$$

Proposition 17 (Règle de Chasles pour les sommes). *Soient p, q et r trois entiers naturels tels que $p < r < q$ et a une suite de réels, alors :*

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p}^{r} a_k + \sum_{k=r+1}^{q} a_k = \sum_{k=p}^{r-1} a_k + \sum_{k=r}^{q} a_k.$$

Exemple 18. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{2n} \min(k, n)$ pour tout entier naturel n.

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}$

1. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)$.
2. Calculer

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\text{pair}}}^{2n} k \ , \quad \sum_{\substack{k=1 \\ k\text{impair}}}^{2n+1} , \ k \ , \quad \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k.$$

3.3 Changement d'indices

Méthode 20 (Décalage d'indice). Soient p, q et r des entiers avec $p \leqslant q$. On dit que l'on fait un décalage d'indice dans la somme $S = \sum\limits_{k=p}^{q} a_k$, si l'on considère un nouvel indice $j = k + r$.

1. On a donc définit le nouvel indice j par $j = k + r$.
2. On peut écrire la relation réciproque $k = j - r$
3. Ainsi dans la somme, le terme générique a_k devient a_{j-r}. Et les bornes $k = p$ et $k = q$ deviennent respectivement $j = p + r$ et $j = q + r$.

On peut donc écrire : $S = \sum\limits_{k=p}^{q} a_k = \sum\limits_{j=p+r}^{q+r} a_{j-r}$.

Méthode 21 (Symétrisation). Soient p, q et r des entiers avec $p \leqslant q$ et $S = \sum\limits_{k=p}^{q} a_k$. On dit que l'on fait une symétrisation d'indice lorsque :

1. On définit un nouvel indice j par $j = q - k$.
2. On peut écrire la relation réciproque $k = q - j$
3. Ainsi dans la somme, le terme générique a_k devient a_{q-j}. Et les bornes $k = p$ et $k = q$ deviennent respectivement $j = q - p$ et $j = 0$ (Notons que la borne supérieure devient la borne inférieure et vice versa).

On peut donc écrire : $S = \sum\limits_{k=p}^{q} a_k = \sum\limits_{j=0}^{q-p} a_{q-j}$.

3.4 Une application, les sommes télescopiques

Lemme 22. *Soit a une suite de complexes et p et q deux entiers naturels vérifiant $p < q$; alors :*

$$\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k) = a_{q+1} - a_p.$$

Application 23 (Une nouvelle identité remarquable). Soit a et b deux réels et n un entier naturel. Alors :

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k \right).$$

Si, de plus n est un entier pair (et donc $n + 1$ est impair), alors :

$$a^{n+1} + b^{n+1} = (a + b) \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a^{n-k} b^k \right).$$

4 Extension aux produits

4.1 Règles de calcul

Proposition 24 (Règles de calcul pour les produits)**.** *Soit (a_k) et (b_k) deux suites de réels et m et n des entiers naturels vérifiant $m \leqslant n$. Alors :*

i) $\prod_{k=m}^{n} (a_k b_k) = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right)$.

ii) Soient λ un nombre réel, alors,

$$\prod_{k=m}^{n} (\lambda a_k) = \lambda^{n-m+1}\left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right).$$

$$\prod_{k=m}^{n} (a_k^{\lambda}) = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)^{\lambda}.$$

Exercice 25. Écrire la règle de Chasles pour les produits

Proposition 26 (Changement d'indice)**.** *Les règles de changement d'indices pour les produits sont exactement les mêmes que pour les sommes.*

Proposition 27 (Produits télescopique)**.** *Soit a une suite de réels et p et q deux entiers naturels vérifiant $p < q$; alors :*

$$\prod_{k=p}^{q} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{q+1}}{a_p}.$$

4.2 Factorielle et coefficients binomiaux

4.2.1 Définitions

Définition 28. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $n! := \prod_{k=1}^{n} k$. Le nombre $n!$ est appelé factorielle de n

Définition 29. Soient n et p deux entiers naturels, on appelle **coefficient binomial « p parmi n »**, et l'on note $\binom{n}{p}$, le nombre suivant :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4.2.2 Propriétés élémentaires

Proposition 30 (Relation de récurrence sur les factorielles)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $(n+1)! = n+1)n!$ et $\frac{(n+1)!}{n+1} = n!$.*

Proposition 31 (Premières propriétés)**.** *Les coefficients binomiaux satisfont les propriétés suivantes*

i) Si $p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \frac{(n-p+1)\times(n-p+2)\times\cdots\times n}{p!} = \frac{1}{p!}\prod_{k=0}^{p-1}(n-k)$.

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Proposition 32 (Symétries des coefficients binomiaux)**.** *Soit p et n deux entiers naturels vérifiant $p \leqslant n$, alors :*

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Proposition 33 (Formule de Pascal)**.** *Soit p et n deux entiers naturels vérifiant $p \leqslant n$. On suppose de plus que $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$,*

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

Proposition 34 (Formule du capitaine)**.** *Soit p et n deux entiers naturels vérifiant $p \leqslant n$. On suppose de plus que $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$,*

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

4.2.3 Formule du binôme

Proposition 35 (Formule du binôme de Newton)**.**

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Remarque 36. En appliquant cette formule avec $b = 1$, il vient :

$$\forall a \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k = (1+a)^n.$$