

Colles semaine 3

En bref

- Calcul de sommes, notation $\sum$ et notation avec points de suspension.
- Relation de Chasles, de réordonnement, de factorisation, etc.
- Changement d'indice dans les sommes.
- Calcul de sommes arithmétiques ou géométriques
- Sommes télescopiques.
- Identité de factorisation de Bernoulli $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$.
- Généralisation aux produits.
- Définition des factorielles et coefficients du binôme.
- Relations entre les coefficients binomiaux.
- Formule du binôme.
- Sommes et produits doubles
- Exemples de raisonnements par analyse-synthèse.
- Nombres complexes :
 - Calcul algébrique, module, conjugaisons, partie réelle et imaginaire.
 - Cas des complexes de module 1, définition de l'argument et notation trigonométrique $re^{i\theta}$.
 - Représentation géométrique incluant notamment l'inégalité triangulaire et ses cas d'égalité.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Donner la formule permettant de calculer $\sum_{k=0}^n k$ ou $\sum_{k=0}^n k^2$ puis prouver cette formule. *On a vu une preuve par récurrence en cours et d'autres moyens plus astucieux en TD.*
- Donner avec preuve une factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$.
- Définir la quantité $\binom{n}{k}$. Montrer que $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.
- Définir la quantité $\binom{n}{k}$. Montrer que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
- Citer et prouver la formule du binôme.
- Montrer par analyse-synthèse l'existence et l'unicité d'une fonction f paire et d'une fonction g impaire telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + g(x) = e^x$.
- Montrer qu'un complexe z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$.
- Définir le conjugué d'un complexe, interprétation géométrique ? Montrer que $\overline{zu} = \bar{z} \cdot \bar{u}$.
- Définir le module d'un complexe, interprétation géométrique ? Montrer que $|zu| = |z| \cdot |u|$.
- Citer et prouver l'inégalité triangulaire. (On pourra demander de citer sans preuve les cas d'égalité pour garder un temps raisonnable sur la question de cours).

Note aux colleurs

- Devant un calcul de somme, un étudiant qui serait perdu DOIT avoir le réflexe d'explicitier la somme en calculant les premiers termes, en cherchant à les placer dans un tableau, bref doit avoir des moyens de sortir de son apathie. Une absence de telle initiative sera durement sanctionnée.
- Le cours sur les complexes est encore assez récent (notamment pour ceux qui n'ont pas fait maths expertes au lycée). Les formules de Moivre ou d'Euler n'ont pas encore été appliquées en exercice.

En détail

1 Logique, Sommes et Produits

Reprise du programme précédent avec deux ajouts :

1.1 Analyse-synthèse

Exemples de raisonnement par analyse-synthèse.

Méthode 1. Voici un squelette de preuve utile pour prouver par analyse-synthèse une assertion de type $\exists x \in E, P(x)$ où E désigne un ensemble et $P(x)$ un prédicat. (Cela permet en plus normalement de prouver l'unicité si elle est satisfaite).

Démonstration. Prouvons par analyse-synthèse l'existence d'un élément $x \in E$ vérifiant $P(x)$:

— Analyse : Soit $x \in E$ vérifiant $P(x)$. Alors ...

⋮

Donc $x = \dots$ *expression à définir, dépendant éventuellement des paramètres du problème. Il peut arriver qu'il y ait plusieurs expressions possibles, auquel cas, on les liste toutes. Si on a une seule expression, alors on a prouvé l'unicité d'un objet $x \in E$ vérifiant $P(x)$.*

— Synthèse : Soit $x = \dots$ *On reprend l'expression exacte donnée par la phase d'analyse. Et s'il y avait plusieurs expressions, on répète cette phase pour chaque expression.*

Alors $x \in E$ car ...

⋮

Donc x vérifie bien $P(x)$.

□

1.2 Sommes et produits doubles

Les étudiants sauront appliquer les formules suivantes, **au besoin en écrivant les termes pertinents dans un tableau** :

Proposition 2 (Somme en ligne ou en colonnes). Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de réels à double indices et n et m deux entiers naturels ; alors :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \right).$$

Proposition 3 (Cas des sommes triangulaires). Avec les notations précédentes, les formules de sommes en lignes et en colonnes s'écrivent respectivement :

$$\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j a_{i,j}$$

et

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{j-1} a_{i,j}$$

2 Nombres complexes

2.1 Calculs algébriques

Définition 4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$. Les réels a et b sont respectivement appelés **partie réelle** et **partie imaginaire** du nombre complexe z . On les

note alors :

$$a = \operatorname{Re}(z) \quad \text{et} \quad b = \operatorname{Im}(z).$$

Tout nombre complexe z s'écrit donc de manière unique sous la forme $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$ qui s'appelle la **forme algébrique** de z .

Les nombres complexes dont la partie réelle est nulle sont appelés **imaginaires purs**. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$ car c'est l'ensemble $\{ib ; b \in \mathbb{R}\}$.

Remarque 5. Un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.

Attention ! Écrire $z = a + ib$ ne suffit pas pour conclure que $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$. Il faut également que a et b soit réels.

2.1.1 Conjugaison

Définition 6. Soit z un nombre complexe. On appelle **conjugué** de z et on note $\bar{z}$ le nombre défini par :

$$\bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z).$$

Proposition 7 (Propriétés de base). *Pour tous nombres complexes z et z' ,*

1. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \overline{\lambda z + \mu z'} = \lambda \bar{z} + \mu \bar{z}'$ (on dit que la conjugaison est $\mathbb{R}$ -linéaire) ;
2. $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$;
3. si de plus, $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$;
4. si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$;
5. $\bar{\bar{z}} = z$ (on dit que la conjugaison est une involution).
- 6.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} ; \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Proposition 8 (Caractérisation des réelles et imaginaires purs). *On peut caractériser les réels et les imaginaires purs.*

- Un nombre complexe z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$.
- Un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$.

2.1.2 Module

Définition 9. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on appelle **module** de z le réel positif, noté $|z|$, défini par :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(\operatorname{Re}z)^2 + (\operatorname{Im}z)^2}.$$

Remarque 10. Si $z \in \mathbb{R}$, alors le module de z n'est autre que la valeur absolue de z .

Proposition 11 (Propriétés de base). *Pour tout nombre complexe z , on a :*

1. $|\bar{z}| = |z|$;
2. $z = 0 \iff |z| = 0$;
3. $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$;
4. si de plus $z \neq 0$,

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

5. Pour tous complexes z_1 et z_2 ,

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \text{et si } z_2 \neq 0, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Proposition 12 (Inversibilité). *Tout nombre complexe $z \neq 0$ admet un inverse noté $\frac{1}{z}$ ou z^{-1} . C'est-à-dire un nombre tel que $zz^{-1} = 1$. Par ailleurs, cet inverse est unique.*

Proposition 13 (Inégalité triangulaire). *Pour tous complexes z_1 et z_2 , on a :*

1.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

avec égalité si et seulement si $\exists k \in \mathbb{R}^+, z_1 = kz_2$ ou $z_2 = kz_1$

2.

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$$

avec égalité si et seulement si $\exists k \in \mathbb{R}^+, z_1 = kz_2$ ou $z_2 = kz_1$

2.2 Interprétation géométrique et notation trigonométrique

2.2.1 Notation exponentielle

Notation 14. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

Notation 15 (Notation d'Euler). Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta}$ le complexe $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

Proposition 16 (Caractérisation de cercle unité). *On a, avec cette notation, $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}; \theta \in \mathbb{R}\}$, c'est-à-dire :*

i) $|e^{i\theta}| = 1$ et donc $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$;

ii) réciproquement, pour tout $z \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.

Proposition 17 (Règles de calculs pour l'exponentielle). *Cette notation est cohérente avec les règles de calculs classiques de l'exponentielle, à savoir :*

i) $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si et seulement si $\theta \equiv \theta' [2\pi]$.

ii) $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.

iii) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$.

iv) $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

Proposition 18 (Formules d'Euler). *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a :*

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \operatorname{Re}(e^{i\theta}) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \operatorname{Im}(e^{i\theta}).$$

Proposition 19 (Formule de De Moivre). *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :*

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

2.2.2 Écriture trigonométrique d'un complexe

Proposition-Définition 20. *Pour tout complexe **non nul** $z \in \mathbb{C}^*$, il existe $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = re^{i\theta}$. Le réel positif r de l'égalité est unique et vaut le module de z , $r = |z|$. Par ailleurs, il existe une infinité de valeur de θ correspondante, toutes congrues modulo 2π . Une telle valeur de θ est appelé un argument de z . L'unique telle valeur de θ de l'intervalle $]-\pi; \pi]$ est parfois appelée argument principal de z et se note $\operatorname{Arg}(z)$. Par ailleurs l'écriture $z = re^{i\theta}$ s'appelle forme trigonométrique de z .*

Corollaire 21. *Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls. Alors,*

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg(z_1) \equiv \arg(z_2) [2\pi] \end{cases}$$

Méthode 22. Comment passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique ?

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ et $z = a + ib$. On calcule $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, puis on cherche un argument θ de z tel que :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

On ne connaît pas toujours une solution simple de ce système !